5. Integralrechnung

5.4 Flächenberechnung mit Integralen und mehreren Funktionen

H. Wuschke

24. November 2022

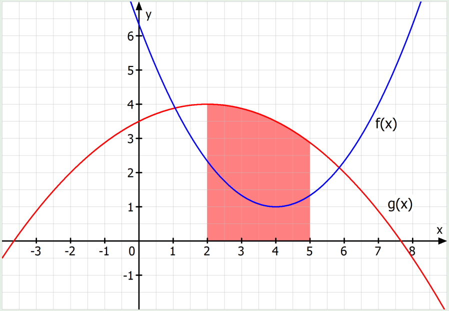
Ziele der Sitzung

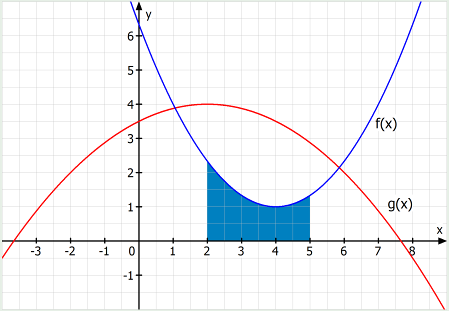
- Berechnung von einer Fläche zwischen zwei Funktionen
- Bestimmung der vollständigen Fläche zwischen zwei Funktionen
- Beschreibung und Berechnung zusammengesetzter Flächen

A1 Flächenberechnung

Es sind $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x-4)^2 + 1$ und $g(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x-2)^2 + 4$.

a) Berechnen Sie die dargestellten Flächen.

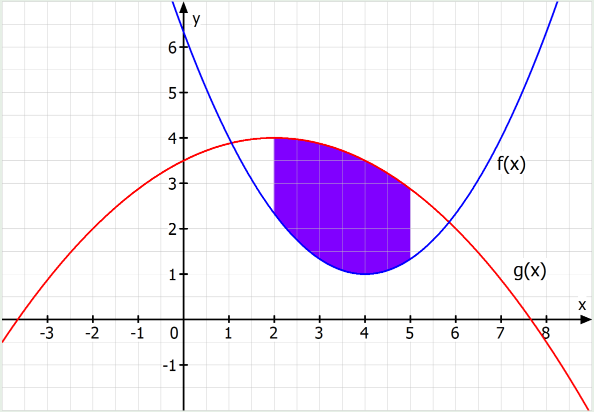




A1 Flächenberechnung

Es sind $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x-4)^2 + 1$ und $g(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x-2)^2 + 4$.

b) Beschreiben Sie, wie die dargestellte Fläche mithilfe Ihrer Ergebnisse aus Aufgabenstellung a) berechnet werden kann.



Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen I

Wird im Intervall $[a;b]$ eine Fläche zwischen zwei integrierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen, so berechnet sich der Flächeninhalt

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

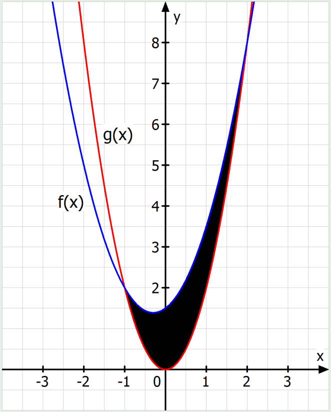
Dabei ist der Funktionsgraph von $f(x)$ die obere Begrenzung und der Funktionsgraph von $g(x)$ die untere Begrenzung der Fläche.

Bemerkungen

1. Merkregel für das Integral: OBERE Funktion minus UNTERE Funktion
2. Liegt $g(x)$ oberhalb von $f(x)$, gilt natürlich: $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$
3. Will man oben und unten nicht unterscheiden, ist es mit dem CAS immer möglich das folgende Integral einzugeben: $\int_a^b |f(x) - g(x)|\;dx$

A2 Fläche zwischen zwei Funktionen

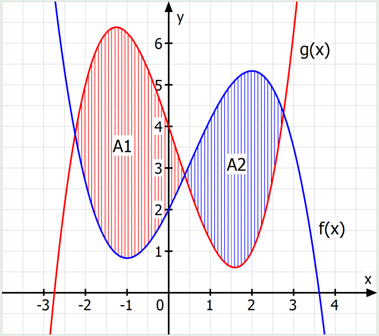
Das Logo einer bekannten Sportfirma lässt sich als vollständig eingeschlossene Fläche zwischen den beiden Funktionen $f(x) = \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ und $g(x) = 2x^2$ darstellen.



Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise zur Berechnung der Fläche.

A3 Mehr als eine Fläche zwischen zwei Funktionen

Die Funktionsgraphen von $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x + 4$ schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.



a) Geben Sie die Schnittstellen der beiden Funktionen an.

b) Berechnen Sie die Flächen A1, A2 und die gesamte Fläche. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und worauf geachtet werden muss.

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen II

Der Flächeninhalt, welcher von zwei beliebigen, integrierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ vollständig eingeschlossen wird, berechnet sich folgendermaßen:

1. Alle Schnittstellen der Graphen bestimmen.
2. Teilflächen zwischen den Schnittstellen berechnen.
3. Der gesamte Flächeninhalt ist die Summe aller Teilflächen.

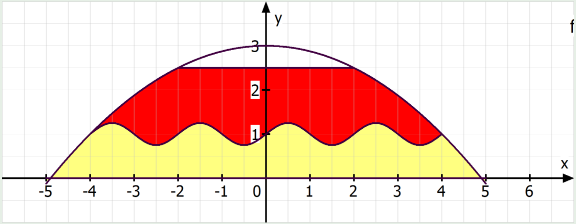
Bemerkung

Sind x_{s_1}, x_{s_2}, ... , x_{s_n} die Schnittstellen zwischen $f(x)$ und $g(x)$, so kann bei Verwendung des CAS die vollständige Fläche zwischen beiden Funktionen auch folgendermaßen berechnet werden:

$$\int_{x_{s_1}}^{x_{s_n}} |f(x) - g(x)| \, dx$$

A4 Zwei Farben, mehrere Flächen

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin(\pi \cdot x) + 1$ und $g(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 3$.



a) Begründen Sie, dass die rote Fläche mithilfe des folgenden Terms berechnet wird:

$$\int_{-4}^{4} (g(x) - f(x))\, dx - \int_{-2}^{2} (g(x) - 2,5)\, dx$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der gelben Fläche.