5. Integralrechnung

5.3 Flächenberechnung mit Integralen und einer Funktion

H. Wuschke

15. November 2022

Ziele der Sitzung

- Berechnung bestimmter Integrale
- Begriff der *Integralfunktion* erweitern
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Flächenberechnung zwischen Funktionen und der x-Achse.

Integrierbarkeit

Sei $c \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f(x)$ heißt **integrierbar** auf $[a; b]$, wenn gilt:

$$\int_a^b f(x)\ dx = c$$

Bemerkung Integrierbarkeit/Stammfunktion

Nicht jede integrierbare Funktion besitzt eine Stammfunktion.

Beispiel: $f : [0; 5] \to \{0; 1\}; f(x) := \begin{cases} 1 & x < 3 \\ 0 & x \geqq 3 \end{cases}$

Hier ist $\displaystyle\int_0^5 f(x)\ dx = 3$, aber die Stammfunktion existiert nicht.

Jede stetige Funktion ist integrierbar.

Berechnung bestimmter Integrale

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a; b]$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Für die Differenz der Funktionswerte schreibt man auch kurz

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Die Konstante c

Die Konstante c ist bei dieser Berechnung irrelevant, da sie wegfällt.

<u>Beispiel:</u>

$$\int_1^3 2x\,dx = \left[x^2 + c\right]_1^3 = 3^2 + c - (1^2 + c) = 9 + c - 1 - c = 8$$

A1 Berechnung bestimmter Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $$\int_0^6 (x^3 - 2x^2)\,dx$$

b) $$\int_1^2 (0,5x^4 - 5x)\,dx$$

c) $$\int_0^{10} \left(\frac{x^2 - 3x}{5} + 1\right) dx$$

d) $$\int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

e) $$\int_0^1 \left(e^x + \frac{1}{2}x\right) dx$$

f) $$\int_0^{2\pi} \cos(x)\;dx$$

g) $$5 \cdot \int_\pi^\pi x^2\;dx$$

h) $$\int_2^5 \left(\frac{1}{x} + 2\right) dx + \int_5^{10} \left(\frac{1}{x} + 2\right) dx$$

Integralfunktion

Sei $f(x)$ eine Funktion. Die **Integralfunktion** $I_a(x)$ ist eine spezielle Stammfunktion, für die gilt:

$$F(a) = 0$$

Sie heißt Integralfunktion, weil sie folgendermaßen notiert wird:

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

Bemerkungen

$F(a) = 0$, weil $I_a(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\ dt = 0$ ist.

Da nicht jede Stammfunktion Nullstellen besitzt, ist nicht jede Stammfunktion eine Integralfunktion.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Für eine Integralfunktion $I_a(x)$ einer stetigen Funktion $f(x)$ gilt:

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)\ dt \qquad \text{von} \qquad I_a'(x) = f(x)$$

Das heißt, die Ableitung einer Integralfunktion $I_a(x)$ von $f(x)$ ist die Funktion $f(x)$. Somit ist jede Integralfunktion $I_a(x)$ von $f(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

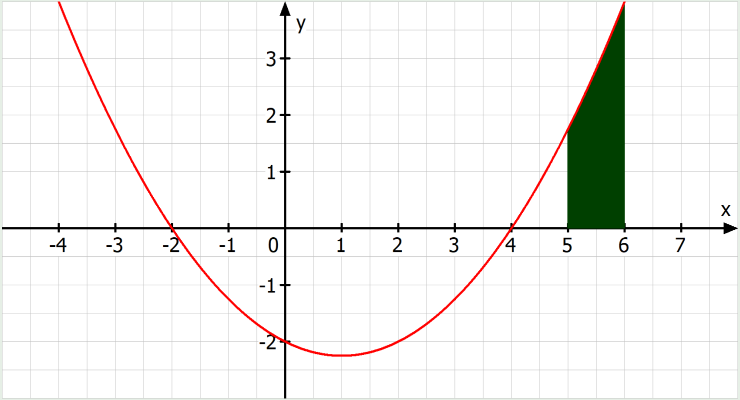
Umgangssprachlich erklärt

Das Integrieren kehrt das Differenzieren um. Das Differenzieren kehrt das Integrieren um.

A2 Eine Funktion mit vielen gewünschten Flächen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$. Berechnen Sie die markierte Fläche.

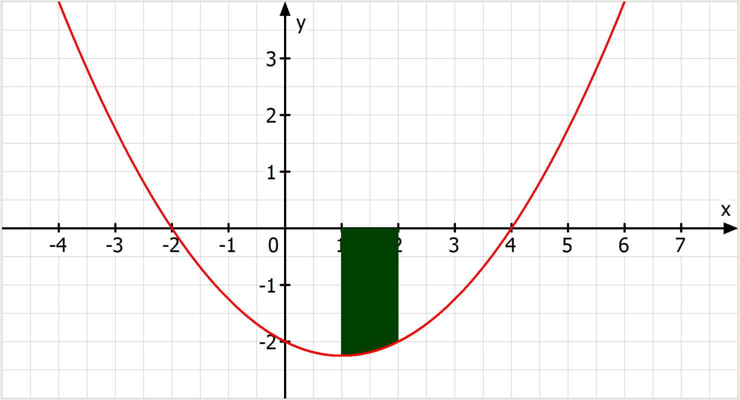
a)



A2 Eine Funktion mit vielen gewünschten Flächen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$. Berechnen Sie die markierte Fläche.

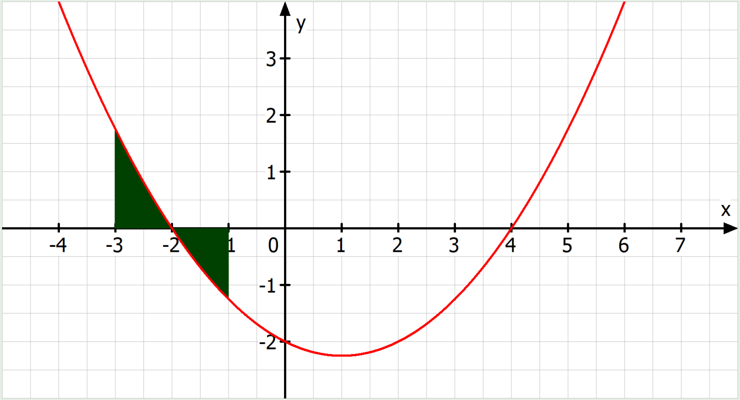
b)



A2 Eine Funktion mit vielen gewünschten Flächen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$. Berechnen Sie die markierte Fläche.

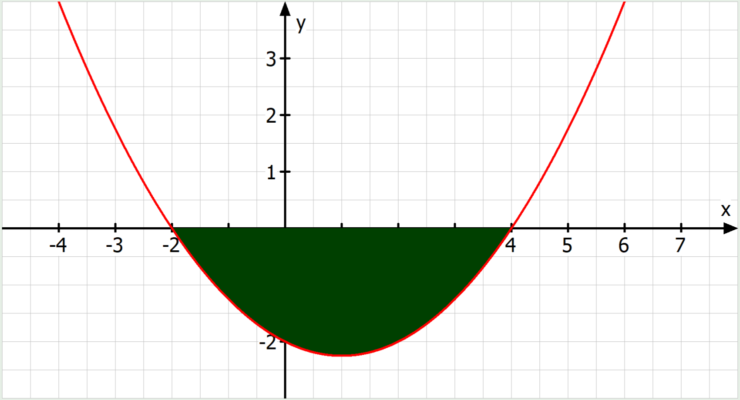
c)



A2 Eine Funktion mit vielen gewünschten Flächen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$. Berechnen Sie die markierte Fläche.

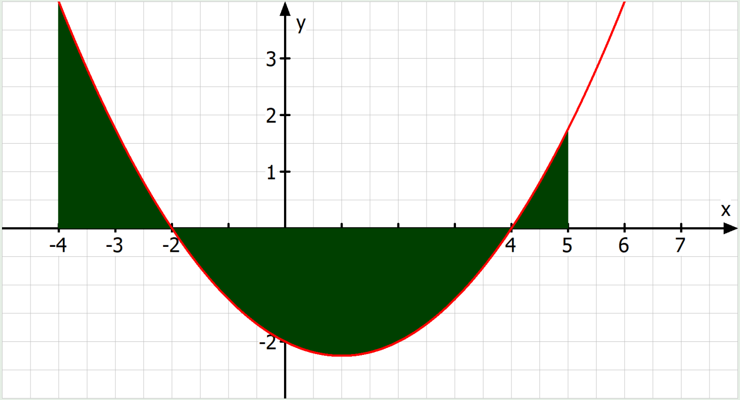
d)



A2 Eine Funktion mit vielen gewünschten Flächen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$. Berechnen Sie die markierte Fläche.

e)



A3 Unterschied zwischen dem Flächeninhalt und dem Integral

Der Graph von $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ und die x-Achse schließen eine Fläche ein, deren Inhalt bestimmt werden soll.

a) Geben Sie die Nullstellen von $f(x)$ an.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$.

c) Begründen Sie, dass das Integral aus Aufgabe b) nicht dem Flächeninhalt entspricht.

d) Überlegen Sie eine Strategie, wie der Inhalt der vollständigen Fläche berechnet werden kann und geben Sie im Anschluss den Flächeninhalt an.

Flächeninhalt zwischen Funktion und x-Achse (Abszisse)

Sei $f(x)$ eine integrierbare Funktion mit den Nullstellen x_1, x_2, ... , x_n.

Dann wird die vollständige Fläche zwischen Funktion und x-Achse folgendermaßen berechnet:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)\ dx \right| + \ldots + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\ dx \right|$$

Bemerkung Nutzung des CAS

Bei Verwendung des CAS, kann auch folgendes Integral gebildet werden:

$$\int_{x_1}^{x_n} |f(x)|\ dx$$

Zusammenhang Betrag und Integral

Sei $f(x)$ eine integrierbare Funktion auf dem Intervall $[a; b]$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Bemerkung zur Gleichheit

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqq \int\limits_a^b f(x)\,dx$$