5. Integralrechnung

5.2 Bestand und Änderung

H. Wuschke

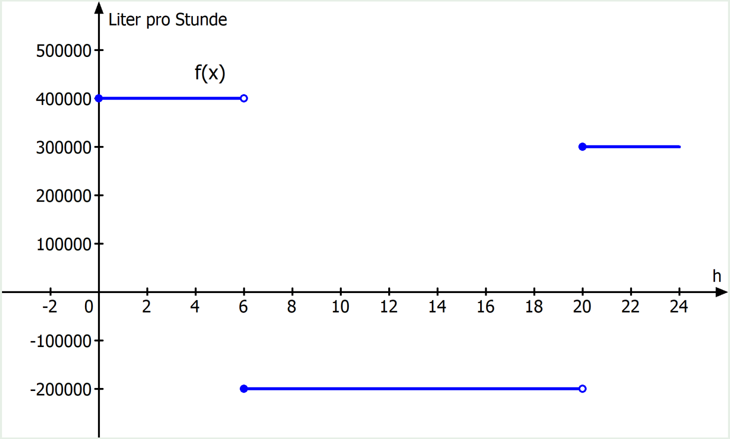
07. November 2022

Ziele der Sitzung

- einen Bestand aus gegebenen Änderungsraten (Wasserstand bei gegebenen Zu- und Abflussraten; Strecke bei gegebenen Geschwindigkeiten) rekonstruieren
- Begriff des *orientierten Flächeninhaltes* in Sachzusammenhängen beschreiben
- Flächenberechnungen von gekrümmten Flächen mittels Ober- und Untersummen
- Begriff des *bestimmten Integrals*

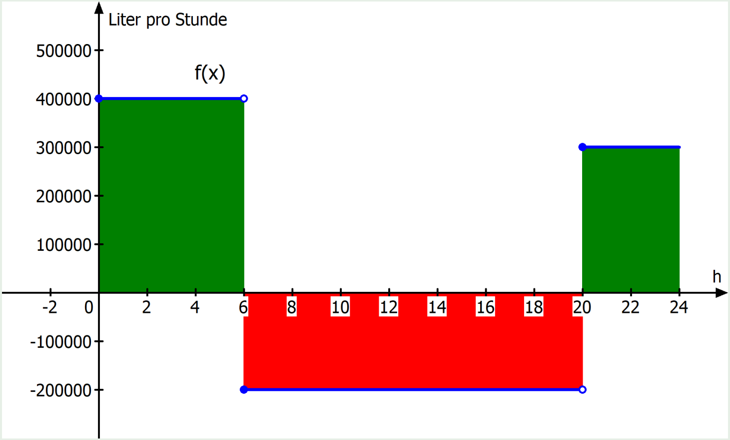
Pumpspeicher Zu- und Abfluss

In einem Pumpspeicher sind zu Beginn 500.000 Liter Wasser. Anschließend fließt Wasser konstant zu und ab wie im Graphen der Funktion $f(x)$ dargestellt.



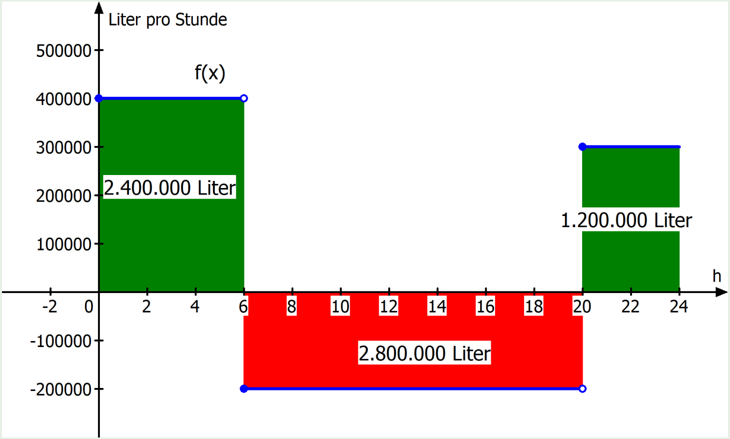
a) Bestimmen Sie, wie viel Wasser nach 24 Stunden im Pumpspeicher sind.

Pumpspeicher Zu- und Abfluss



Die Funktion $f(x)$ beschreibt den Zufluss und Abfluss des Wassers.
Die Funktion $F(x)$ beschreibt den Bestand an Wasser.

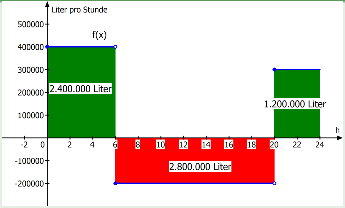
Pumpspeicher Zu- und Abfluss



Zu Beginn sind 500.000 Liter Wasser im Speicher, dazu kommen 2.400.000 Liter, anschließend fließen 2.800.000 Liter wieder ab und zum Schluss kommen 1.200.000 Liter wieder dazu.

Nach 24 Stunden sind also 1.300.000 Liter im Pumpspeicher.

Pumpspeicher Zu- und Abfluss



b) Beschreiben Sie mithilfe von Änderung $f(x)$ und Bestand $F(x)$ die Rechnung.

Bestand zu Beginn:
$F(0) = 500.000$ Liter

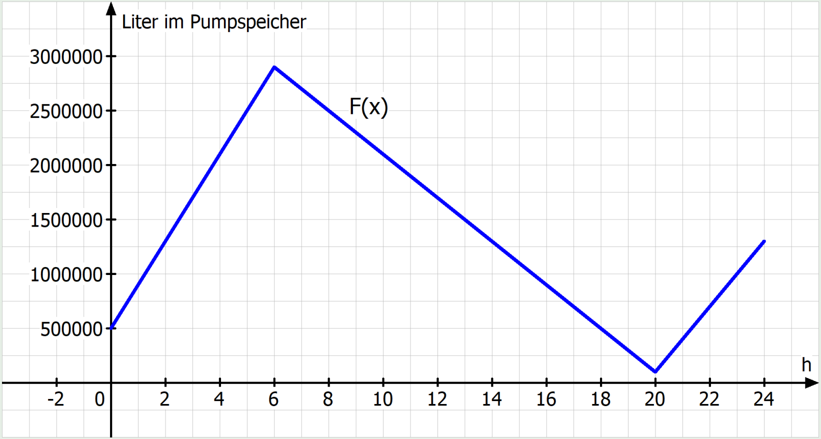
Bestand nach 6 Stunden:
$F(6) = F(0) + f(0) \cdot (6 - 0) = 500.000 + 400.000 \cdot 6 = 2.900.000 l$

Bestand nach 20 Stunden:
$F(20) = F(6) + f(6) \cdot (20 - 6) = 2.900.000 + (-200.000) \cdot 14 = 100.000 l$

Bestand nach 24 Stunden:
$F(24) = F(20) + f(20) \cdot (24 - 20) = 100.000 + 300.000 \cdot 4 = 1.300.000 l$

Pumpspeicher Zu- und Abfluss

c) Stellen Sie $F(x)$ graphisch dar und beschreiben Sie den Zusammenhang zu $f(x)$.



Die Anstiege der linearen Abschnitte von $F(x)$ entspricht den Änderungen von $f(x)$.

Orientierter Flächeninhalt

Orientierte Flächeninhalte sind Flächeninhalte zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse.
Liegen diese Flächen oberhalb der x-Achse, sind ihre Vorzeichen positiv.
Liegen sie unterhalb der x-Achse, sind ihre Vorzeichen negativ.

Bemerkung

In Sachzusammenhängen kann dies beispielsweise der Zufluss (positives Vorzeichen) und Abfluss (negatives Vorzeichen) von Flüssigkeiten oder Zunahme (positives Vorzeichen) und Abnahme von Gewicht (negatives Vorzeichen) sein.

Zusammenhang Änderungsrate – Bestand

Der Flächeninhalt der jeweiligen Änderungsraten ergibt den Bestand der entsprechenden Intervalle.

Badewannen Zu- und Abfluss

In eine leere Badewanne wird 1 Minute lang Wasser mit 10 Litern pro Minute eingelassen, dann die Wasserzufuhr gestoppt und gleichzeitig der Abfluss geöffnet, durch den 5 Liter pro Minute abfließen können. Nach weiteren 1,5 Minuten wird der Abfluss wieder geschlossen. Wie lässt sich aus der Zuflussgeschwindigkeit auf die Wassermenge in der Badewanne schließen?

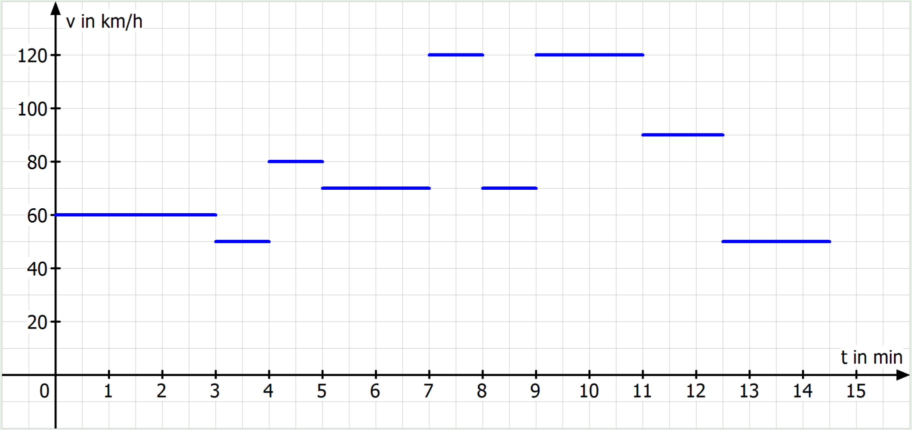
https://www.geogebra.org/m/jv2z8vgz

Experiment

Probieren Sie den Zu- und Abfluss von Wasser selbst aus.
https://www.geogebra.org/m/BbFk6DDJ
Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Zuflussrate und dem Wasservolumen.

Autofahrt von Herrn Wuschke

Herr Wuschke fährt täglich mit dem Auto von Rühlow nach Friedland. Hier sehen Sie den Graphen einer typischen Strecke, die er täglich zurücklegt.

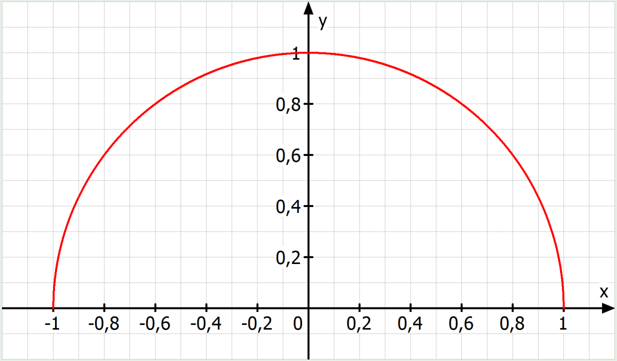


Weisen Sie nach, dass die Strecke ca. 18,6 km lang ist.

Flächeninhalt gekrümmter Flächen

Für den Flächeninhalt eines Halbkreises mit Radius 1 LE, ist bekannt, dass der Flächeninhalt $\frac{\pi}{2}$ FE beträgt.

Die Funktionsgleichung des oberen Halbkreises ist $k(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Beschreiben Sie eine Möglichkeit, den Flächeninhalt möglichst genau anzunähern.



Zerlegung, Obersumme, Untersumme

Ist eine Funktion $f(x)$ gegeben und wird der orientierte Flächeninhalt über dem Intervall $[a; b]$ gesucht, so wird dieses Intervall zunächst mithilfe einer Zerlegung Z_n in n gleiche Teile der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ aufgeteilt.

$$a = x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_{n-1} \leqq x_n = b$$

Die Untersumme $U(Z_n)$ ist dabei

$$U(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\min_k) \cdot \Delta x$$

Die Obersumme $O(Z_n)$ ist dabei

$$O(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\max_k) \cdot \Delta x$$

Veranschaulichung für das Beispiel

Bei folgender Datei kann die Unter- und Obersumme besser verstanden werden: `https://www.geogebra.org/m/x2kub9pr`

Bestimmtes Integral

Sei $f(x)$ eine auf $[a; b]$ definierte Funktion sowie Z_n eine Zerlegung von $[a; b]$. Wenn

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n) = \lim_{n\to\infty} O(Z_n)$$

gilt, so heißt dieser Grenzwert das **bestimmte Integral von f(x) über dem Intervall** $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Bemerkung

Bestimmte Integrale berechnen stets orientierte Flächeninhalte.

Rechenregeln mit bestimmten Integralen

Seien $f(x)$ und $g(x)$ auf einem Intervall $[a; b]$ definierte Funktionen und $a \leqq b \leqq c$ sowie $a, b, c, k \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

$$\int_a^b (k \cdot f(x))\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\ dx$$

$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx \qquad \int_a^a f(x)\ dx = 0$$