5. Integralrechnung

5.1 Integralfunktion und Stammfunktion

H. Wuschke

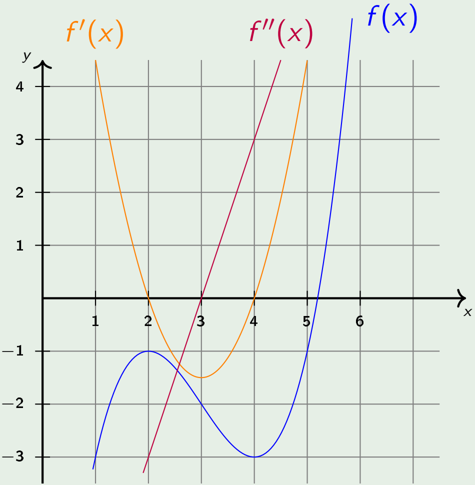
03. November 2022

Ziele der Sitzung

- Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung beschreiben
- Stammfunktionen bilden
- Integralfunktionen als spezielle Stammfunktionen bilden

Aufgabe A1 ohne CAS

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion und ihren beiden Ableitungen.



NEW-Merkschema

Merkschema für eine Funktion $f(x)$ und ihre Nullstellen (N), Extremstellen (E) und Wendestellen (W)

$F(x)$	N	E	W				
$f(x)$		N	E	W			
$f'(x)$			N	E	W		
$f''(x)$				N	E	W	
$f'''(x)$					N	E	W

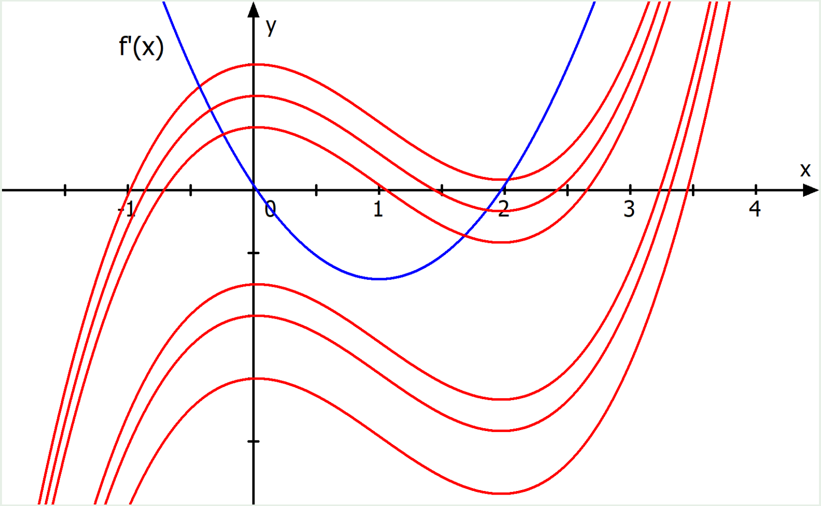
Dieses Schema wird spaltenweise angeschaut.

Daran ist erkennbar, dass an den Extremstellen (E) der Funktion $f(x)$ also die Nullstellen (N) von $f'(x)$ sind.

Oder Wendestellen (W) der Funktion $f(x)$ sind Extremstellen (E) von $f'(x)$ und Nullstellen (N) von $f''(x)$

A2 Eine Ableitung, mehrere Funktionen

Begründen Sie, dass zu der blauen Ableitungsfunktion $f'(x)$ alle Graphen der roten Funktionen als $f(x)$ passen können.



A3 Ableitungen wiederholen

Bilden Sie die folgenden Ableitungen und beschreiben Sie ihr Vorgehen:

- $\frac{d}{dx}\left(4x^3 - 6x^2 + 5x - 7\right)$
- $\frac{d}{dx}\left(\sin(x) + 5x^3 - 6x + e^x\right)$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{3}x^6 + \frac{2}{5}x^5 + \ln(x) - \sqrt[4]{x^7} + \frac{3}{x^4}\right)$

A4 Funktion vergessen

Anne hat die Ableitung $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x - 7$ gegeben.

a) Geben Sie einen geeigneten Term für die Funktion $f(x)$ an.

b) Begründen Sie, dass es mehrere Funktionsterme für $f(x)$ gibt.

Prinzip des Ableitens von Potenzfunktionen

Ist eine Funktion $f(x) = k \cdot x^p$ gegeben, so wird die Ableitung folgendermaßen gebildet:

1. Ziehe den Exponenten als Faktor nach vorne

$$p \cdot k \cdot x^p$$

2. Verringere den Exponenten um 1

$$p \cdot k \cdot x^{p-1}$$

Prinzip des Aufleitens von Potenzfunktionen

Ist eine Funktion $f(x) = k \cdot x^p$ gegeben, so wird die Aufleitung folgendermaßen gebildet:

1. Erhöhe den Exponenten um 1

$$k \cdot x^{p+1}$$

2. Ziehe den Exponenten als Divisor nach vorne

$$\frac{k}{p+1} \cdot x^{p+1}$$

unbestimmtes Integral, Stammfunktion

Die Umkehroperation zum Differenzieren ist das Integrieren.

Für eine Funktion $f(x)$ heißt $F(x)$ **Stammfunktion**, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Symbolisch schreibt man $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Dies Integral über $f(x)$ heißt **unbestimmtes Integral** und erzeugt die Menge aller Stammfunktionen.

Die Konstante c

Da nach der Konstantenregel der Differentialrechnung alle Konstanten durch das Ableiten wegfallen, müssen diese durch das Integrieren wieder hinzugefügt werden. Nun ist es jedoch schwierig, die richtige Konstante zu finden, deshalb wird ein reeller, konstanter Summand $+c$ angehängt. Dadurch entsteht die Menge aller Stammfunktionen (Vgl. A2).

Rechenregeln mit unbestimmten Integralen

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei integrierbare Funktionen $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int (k \cdot f(x))\, dx = k \cdot \int f(x)\ dx$$

$$\int f(x)\ dx = \int f(t)\ dt \qquad\qquad \int f(x)\ dt = f(x) \cdot t + c$$

Beispiele

1. $\int 6 \cdot x^3\ dx = 6 \cdot \int x^3\ dx = \frac{3}{2}x^4 + c$
2. $\int \left(4x^5 + 3x^2 - 12x + 4\right) dx = \frac{2}{3}x^6 + x^3 - 6x^2 + 4x + c$
3. $\int (4x - 2y)\, dx = 2x^2 - 2xy + c$
   $\int (4x - 2y)\, dy = 4xy - y^2 + c$
4. $\int (aspiri)\, dn = aspirin + c$

spezielle Stammfunktionen

$\int e^x \; dx = e^x + c$

$\int \frac{1}{x} \; dx = \ln|x| + c$

$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$

$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$

Beispiele

1. $\int \left(\frac{3}{x}\right) dx = 3 \cdot \int \left(\frac{1}{x}\right) dx = 3 \cdot \ln|x| + c$
2. $\int (14 \cdot \cos(n)) \, dn = 14 \cdot \int \cos(x) dx = 14 \cdot \sin(x) + c$
3. $\int (5 \cdot e^x) \; dx = 5 \cdot e^x + c$

A5 Spezielle Stammfunktion finden

Finden Sie zu der Funktion $f(x) = 6x^2 - 4x + 2$ die Stammfunktion $F(x)$, für die gilt:

1. $F(0) = 0$
2. $F(0) = 2$
3. $F(1) = 0$
4. $F(2) = 3$
5. $F(-1) = 2$

Integralfunktion

Sei $f(x)$ eine Funktion. Die **Integralfunktion** $I_a(x)$ ist eine spezielle Stammfunktion, für die gilt:

$$F(a) = 0$$

partielle Integration

Für zwei stetig differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt:

$$\int f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ dx$$

Beispiel

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\ dx = -(\cos(x))^2 - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\ dx$$

$$2 \cdot \int \sin(x) \cdot \cos(x)\ dx = -(\cos(x))^2$$

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\ dx = -\frac{1}{2} \cdot (\cos(x))^2 + c$$

Aufgabe A6

Weisen Sie nach, dass gilt: $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\ dx = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x))^2 + c$