4. Stochastik

4.2. Baumdiagramme und Vierfeldertafeln

H. Wuschke

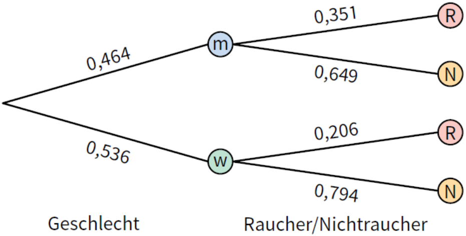
28. April 2022

Ziele der Sitzung

- Baumdiagramme zeichnen können
- Aus einem Baumdiagramm eine Vierfeldertafel aufstellen
- Aus einer Vierfeldertafeln zwei Baumdiagramme aufstellen
- Ereignisse auf Abhängigkeit/Unabhängigkeit untersuchen können

Baumdiagramm

Zur Veranschaulichung von (mehrstufigen) Zufallsexperimenten kann ein **Baumdiagramm** genutzt werden. Die Zweige zeigen dabei die einzelnen Ergebnisse der jeweiligen Stufe an und die Pfade sind verschiedene Ereignisse.



Pfadregeln

1. Entlang des Pfades wird multipliziert.
2. Mehrere Pfade werden addiert.

Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 256, HW

Vierfeldertafel

Zwei Ereignisse können auch in einer **Vierfeldertafel** zusammengetragen werden.

	Ereignis A	Ereignis $\overline{A}$	gesamt
Ereignis B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
Ereignis $\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
gesamt	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Es gilt beispielsweise: $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$.

Es heißt $A \cap B$ (A geschnitten B): A und B treten ein.

Bemerkung Vierfeldertafel/Kontingenztafel

In manchen Literaturquellen wird eine Vierfeldertafel ausschließlich für absolute Daten verwendet und eine Kontingenztafel für relative Zahlen bzw. Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel – Alkoholkonsum von 18- bis 25jährigen

Bei dem BZgA-Jahresbericht 2019[a] zum Thema „Alkoholkonsum Jugendlicher“ wurden Personen im Alter von 18 bis 25 Jahre befragt. Der Anteil der Frauen betrug 47,6%. Es gaben 34,0% der Personen an, dass sie regelmäßig Alkohol konsumieren. 23,6% der Teilnehmer sind männlich und trinken regelmäßig.

	männlich	weiblich	gesamt
trinken reglm.	23,6%	10,4%	34,0%
$\overline{\text{trinken reglm.}}$	28,8%	37,2%	66,0%
gesamt	52,4%	47,6%	100 %

[a] https://www.bzga.de/fileadmin/user_upload/PDF/studien/Alkoholsurvey_2018_Alkohol-Bericht.pdf

Aus einer Vierfeldertafel werden zwei Baumdiagramme

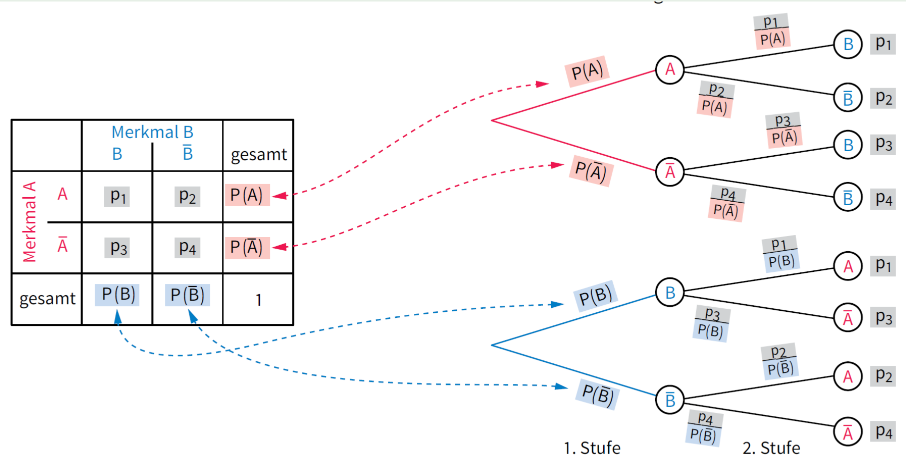


Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 255, HW

Aus einem Baumdiagramm wird eine Vierfeldertafel

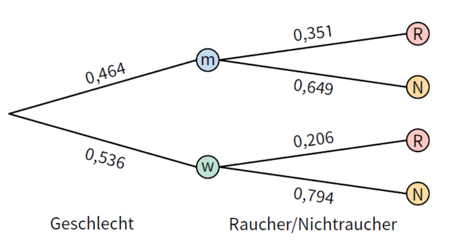


Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 256, HW

Es ist $P(m \cap R) = 0,464 \cdot 0,351 = 0,162864 \approx 0,163$

$P(m \cap N) \approx 0,301$, $P(w \cap R) \approx 0,110$ und $P(w \cap N) \approx 0,426$

	m	w	gesamt
R	0,163	0,110	0,273
N	0,301	0,426	0,727
gesamt	0,464	0,536	1

Bei manchen Ereignissen gibt es Zusammenhänge, welche die Wahrscheinlichkeit beeinflussen.

Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Ereignissen

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn gilt: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.
Dies erkennt man in der Vierfeldertafel, wenn in der Mitte die Produkte stehen und im Baumdiagramm, wenn die Äste der zweiten Stufe gleiche Wahrscheinlichkeiten haben (Abbildung).

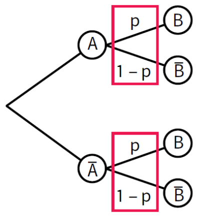


Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 261, HW

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sind zwei Ereignisse A und B nicht stochastisch unabhängig, so bedingen sie sich.

Dabei ist $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ die Wahrscheinlichkeit für B unter der Bedingung A

und $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ die Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B.

Beispiel Raucher

In dem Beispiel über die männlichen und weiblichen Raucher ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann raucht ist ca. 35,1 % und die Wahrscheinlichkeit, dass eine rauchende Person männlich ist ca. 59,7 %, weil gilt:

$$P_m(R) = \frac{0,163}{0,464} \approx 0,351 \qquad P_R(m) = \frac{0,163}{0,273} \approx 0,597$$

Abituraufgabe Sachsen LK 2013, 1.5

Die Endstücke werden von der Firma mit zwei Maschinen produziert. Maschine A produziert 60% und Maschine B produziert 40% der Gesamtprouktion.
Erfahrungsgemäß sind 96% der von Maschine A produzierten Endstücke und 94% der von Maschine B produzierten Endstücke normgerecht.
Der Gesamtproduktion der Firma wird ein Endstück zufällig entnommen. Es ist nicht normgerecht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Endstück von der Maschine A produziert wurde.

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Für die Wahrscheinlichkeiten zweier beliebiger Ereignisse A und B gilt:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$$

Bemerkung

Analog kann $P(\overline{A})$, $P(B)$ und $P(\overline{B})$ definiert werden. Dieser Satz ist maßgeblich für die Erstellung der Vierfeldertafel.

Satz von Bayes (1763, Thomas Bayes [1701–1761])

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt der Satz von Bayes:

$$P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}$$