4. Stochastik

4.1 Grundbegriffe der Stochastik

H. Wuschke

21. April 2022

Ziele der Sitzung

- Grundbegriffe der Mengenlehre symbolisch beschreiben und Mengenoperation ausführen
- Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschreiben
- Zufallsexperimente in mehrstufigen Baumdiagrammen darstellen
- Eigenschaften von Laplace-Experiment beschreiben
- Ergebnismengen angeben

Begriffe in der Mengenlehre

Definition einer Menge (Georg Cantor, 1869)

„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung $\mathcal{M}$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von $\mathcal{M}$ genannt werden) zu einem Ganzen."

$a \in \mathcal{M}$ (a ist ein Element von $\mathcal{M}$) $\emptyset$ - die leere Menge

$a \notin \mathcal{M}$ (a ist kein Element von $\mathcal{M}$)

Beispiele

1. $\mathcal{M} = \{1, 3, 4, 17, 42\}$, dann ist bspw. $42 \in \mathcal{M}$, aber $2 \notin \mathcal{M}$
   $\{1, 3, 1, 17, 4, 3, 1, 42, 1\} = \{1, 3, 4, 17, 42\}$ – jedes Element kommt nur einmal vor
2. $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen

Mengenbeziehungen

Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ Mengen.

$\mathcal{M}_1 \subseteqq \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow$ alle Elemente von $\mathcal{M}_1$ sind auch in $\mathcal{M}_2$ enthalten.
($\mathcal{M}_1$ ist Teilmenge von $\mathcal{M}_2$)

$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow$ alle Elemente von $\mathcal{M}_1$ sind auch in $\mathcal{M}_2$ enthalten
<u>und</u> es gibt Elemente in $\mathcal{M}_2$, die nicht in $\mathcal{M}_1$ sind.
($\mathcal{M}_1$ ist echte Teilmenge von $\mathcal{M}_2$)

$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ enthalten die selben Elemente
($\mathcal{M}_1$ gleich $\mathcal{M}_2$)

Bemerkung

Es gilt stets: $\mathcal{M} \subseteqq \mathcal{M}$ und $\emptyset \subseteqq \mathcal{M}$.

Ist $\mathcal{M}_1 \subseteqq \mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_2 \subseteqq \mathcal{M}_1$, dann gilt: $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$

implizite und explizite Angabe von Mengen

Mengen können auf zwei Arten angegeben werden:

1. Explizite Angabe aller Elemente:
$\mathcal{M}_1 = \{1, 3, 6, 7\}$; $\mathcal{M}_2 = \{\heartsuit, \bigstar, \square\}$

2. Implizite Angabe der charakteristischen Eigenschaft:
$\mathcal{M}_3 = \{x \mid x \text{ ist Primzahl}\}$; $\mathcal{M}_4 = \{k : k \text{ ist Küchengerät}\}$

Beispiele

1. Sei $\mathcal{A} = \{k \mid k \text{ ist bestandene Klausur}\}$
und $\mathcal{B} = \{K \mid K \text{ ist Klausur}\}$, dann ist $\mathcal{A} \subseteqq \mathcal{B}$.
Wenn alle Klausuren bestanden wurden, dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}$,
ansonsten sogar $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$
2. $\{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \text{ ist gerade}\} \subseteqq \mathbb{N}$
3. $\{1, 4\} \subseteqq \{1, 2, 3, 4\}$ bzw. sogar $\{1, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

A1) Mengendarstellungen

Geben Sie die folgenden Mengen explizit an:

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leqq 8\}$
2. $B = \{y \mid y \in \mathbb{Z},\ |y| < 5\}$
3. $C = \{w \mid w = 2 \cdot k - 1,\ k \in \mathbb{N},\ w < 12\}$

Bei den nachfolgenden Mengen wünscht man sich eine implizite Schreibweise. Geben Sie diese an.

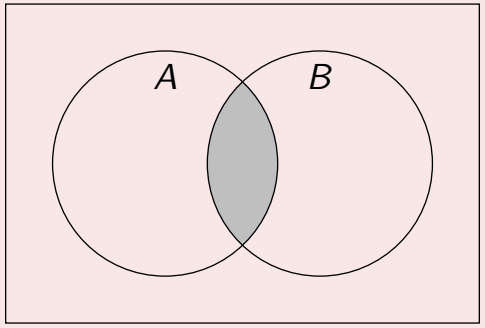
1. $D = \{5, 10, 15, 20, 25, ...\}$
2. $E = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$
3. $F = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, ...\}$
4. $G = \left\{..., -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...\right\}$

Mengenoperationen

Durchschnitt

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Heißt **Durchschnitt** der Mengen A und B.



Ist $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B **disjunkt**.

Beispiele

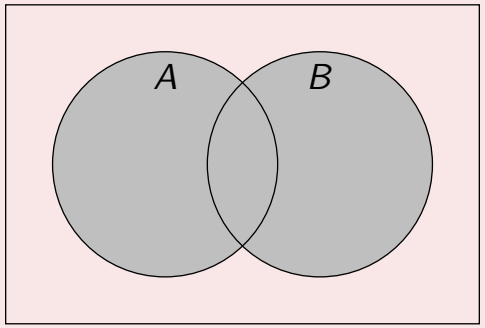
1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{1, 2\}$
   $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 7\} \cap \{y \mid y \in \mathbb{Z}, |y| \leqq 3\} = \{1, 2, 3\}$
2. $\{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{p \mid p \text{ ist Primzahl}\} = \{2\}$

Vereinigung

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Heißt **Vereinigung** der Mengen A und B.

(Das oder ist ein mathematisches - „nicht ausschließendes oder“.)



Beispiele

1. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Vereinigung und Schnitt von Teilmengen

Seien A und B zwei (nichtleere) Mengen, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $A \subseteqq B$

(ii) $A \cap B = A$

(iii) $A \cup B = B$

Vereinigung und Schnitt mit $\emptyset$

Es gilt für die Menge A außerdem:

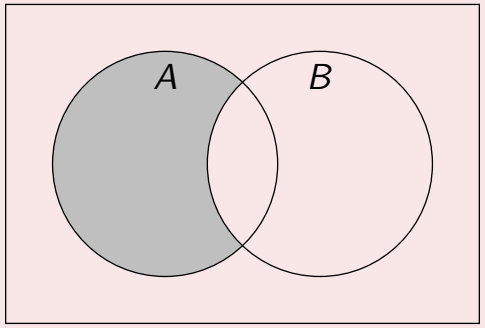
$$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad\qquad A \cup \emptyset = A$$

Differenzmenge

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Heißt **Differenzmenge** „A ohne B“.

(Achtung: A/B ist die Faktormenge!)



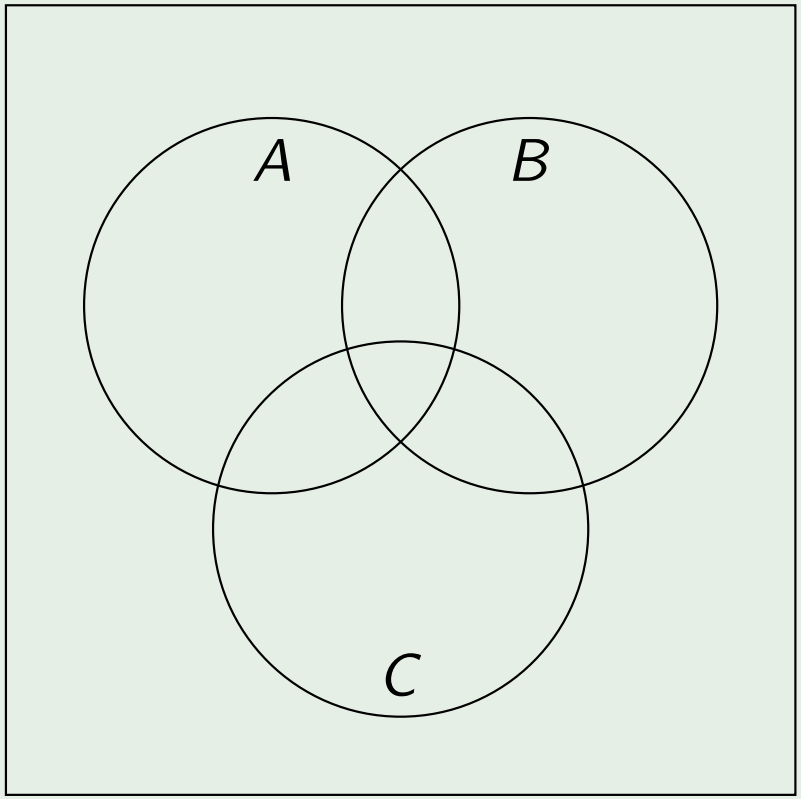
Beispiele

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \setminus \{p \mid p \text{ ist Primzahl }\} = \{1, 4, 6, 8\}$
2. $\{4 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \setminus \{2 \cdot m \mid m \in \mathbb{N}\} = \emptyset$
3. $\{S \mid S \text{ ist Säugetier }\} \setminus \{L \mid L \text{ Tier, das an Land lebt}\}$
   $= \{Wal, Robbe, Seekuh, Seeotter\}$,

   wobei natürlich $\{Delphin\} \subseteq \{Wal\}$ gilt.

A2) Übung Venn-Diagramm

Markieren Sie die gesuchten Mengen im Venn-Diagramm.

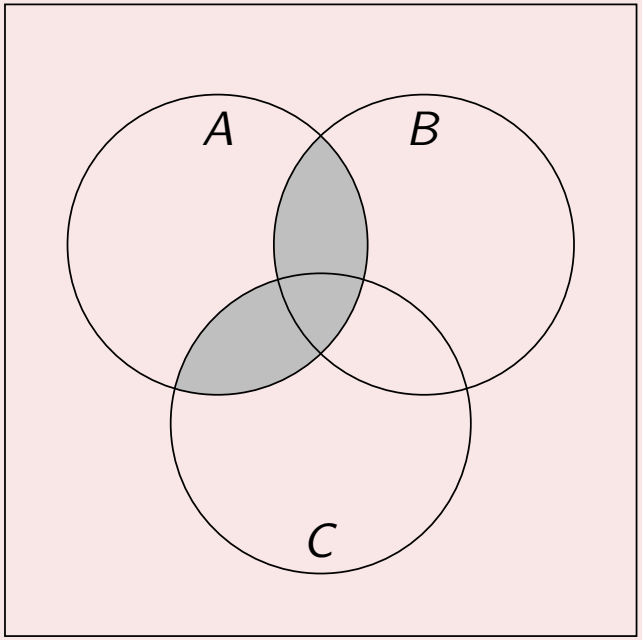


1. $(A \setminus C) \cap B$
2. $(C \cap B) \cap A$
3. $(A \cup B) \cap C$
4. $(B \setminus C) \cup A$
5. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

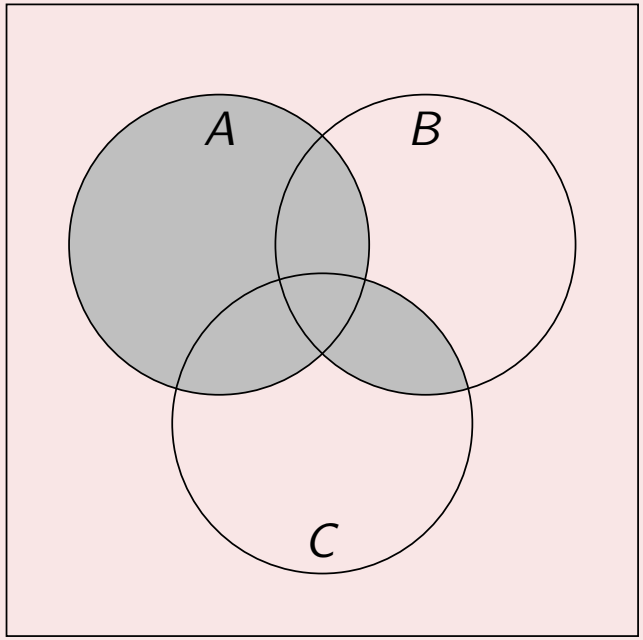
Distributivgesetze der Mengenlehre

Für drei Mengen A,B,C gilt:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



Intervallschreibweise für Mengen reeller Zahlen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}; \quad \text{alternativ }]a, b[$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x\}; \qquad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq b\}; \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Was ist Zufall?

Abbildung: Plakat Schauspiel Leipzig [HW 2014]

Abbildung: Buchmesse Leipzig [HW 2013]

Was ist Zufall?

Abbildung: Einsamer Drucker [HW 2017]

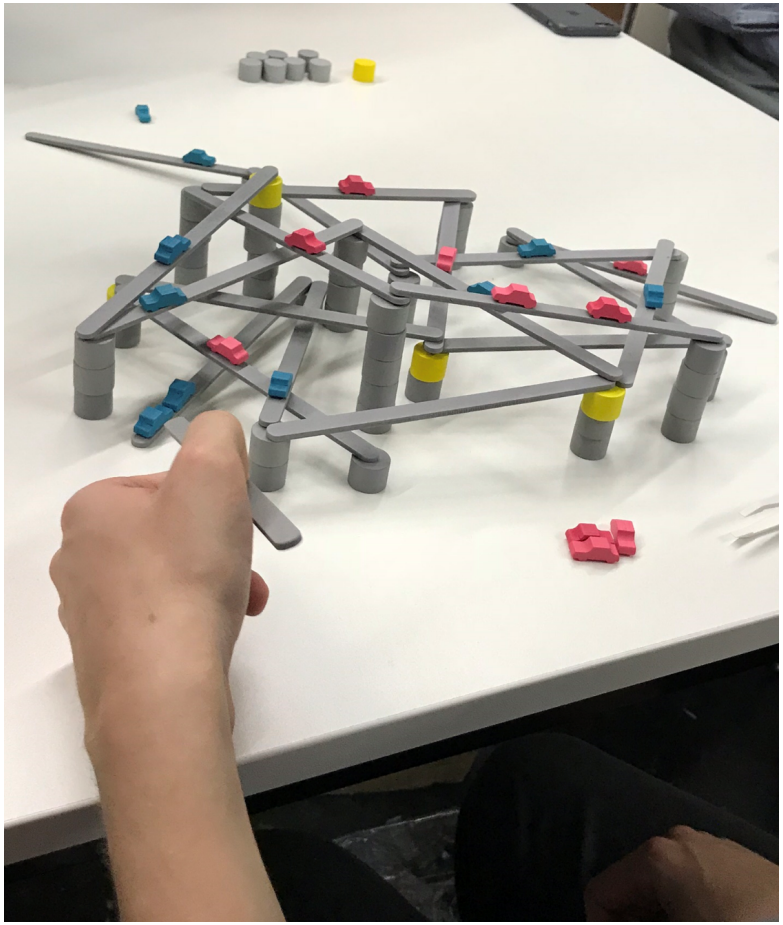


Abbildung: Tokyo Highway [HW 2018]

Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis, Wahrscheinlichkeit

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Vorgang mit ungewissem Ausgang.

Das Resultat bzw. der Ausgang eines Zufallsexperimentes heißt (Versuchs-)**Ergebnis** oder Elementarereignis.
(Mehrere) Ergebnisse werden zu einem (Versuchs-)**Ereignis** zusammengefasst.

Jedem Ergebnis/Ereignis E wird eine **Wahrscheinlichkeit** $P(E)$ mit $0 \leqq P(E) \leqq 1$ zugewiesen.

Ist $P(E) = 0$, so spricht man vom unmöglichen Ereignis.
Isr $P(E) = 1$, so spricht man vom sicheren Ereignis.

Beispiel – Würfeln

Ein gewöhnlicher Würfel (Hexaeder) wird geworfen und die Augenzahl bestimmt.
$P(2 \text{ oder } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\quad P(\text{Zahl kleiner als } 7) = 1$; $\quad P(7) = 0$

In der Praxis treten die Ereignisse nicht so auf, wie wir sie mathematisch berechnen. Sonst würde man beispielsweise bei sechs Mal würfeln definitiv eine 3 würfeln.

(schwaches) Gesetz der großen Zahlen

Wird ein Zufallsexperiment sehr oft wiederholt, nähert sich die relative Häufigkeit mit zunehmender Versuchszahl der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit an.

Beispiel Ereignis: Würfeln einer 3 mit normalem Würfel

$P(E) = \frac{1}{6} \approx 0,1667$

`http://www.henked.de/begriffe/wahrscheinlichkeit.htm#gesetz`

An dem Beispiel sieht man, dass je größer die Anzahl n der Versuche wird, umso näher kommen wir an $\frac{1}{6}$ heran.

Ergebnismenge und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Menge aller möglichen Ergebnisse wird als **Ergebnismenge** Ω oder Ergebnisraum Ω bezeichnet.

Es gilt: $P(\Omega) = 1$
(Die Wahrscheinlichkeit aller Ergebnisse ist sicher).

Die Wahrscheinlichkeit aller Ergebnisse wird als **Wahrscheinlichkeitsverteilung** bezeichnet.

Beispiele für Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Einmaliges Werfen einer Münze: $\Omega = \{\text{Wappen}; \text{Zahl}\}$

$$P(\text{Wappen}) = \frac{1}{2} \qquad P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$$

Zweimaliges Werfen einer Münze: $\Omega = \{\text{WW}; \text{WZ}; \text{ZW}; \text{ZZ}\}$

$$P(WW) = \frac{1}{4} \qquad P(WZ) = \frac{1}{4} \qquad P(ZW) = \frac{1}{4} \qquad P(ZZ) = \frac{1}{4}$$

Beispiele für Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Werfen einer Münze, bis zweimal W oder zweimal Z erschien:

$\Omega = \{\mathrm{WW}; \mathrm{ZZ}; \mathrm{WZW}; \mathrm{WZZ}; \mathrm{ZWW}; \mathrm{ZWZ}\}$

$$P(WW) = \frac{1}{4} \qquad P(ZZ) = \frac{1}{4} \qquad P(WZW) = \frac{1}{8}$$

$$P(WZZ) = \frac{1}{8} \qquad P(ZWW) = \frac{1}{8} \qquad P(ZWZ) = \frac{1}{8}$$

Würfeln eines Tetraeders und danach eine Münze werfen:

$\Omega = \{1\mathrm{W}; 1\mathrm{Z}; 2\mathrm{W}; 2\mathrm{Z}; 3\mathrm{W}; 3\mathrm{Z}; 4\mathrm{W}; 4\mathrm{Z}\}$

$$P(1W) = \frac{1}{8} \quad P(1Z) = \frac{1}{8} \quad P(2W) = \frac{1}{8} \quad P(2Z) = \frac{1}{8}$$

$$P(3W) = \frac{1}{8} \quad P(3Z) = \frac{1}{8} \quad P(4W) = \frac{1}{8} \quad P(4Z) = \frac{1}{8}$$

Laplace-Experiment

Ist jedes Ergebnis E in der Ergebnismenge Ω gleich wahrscheinlich, so spricht man von einem **Laplace[a]-Experiment**

[a] Pierre-Simon Laplace (1749–1827), frz. Mathematiker

Abbildung: Dodekaeder, CC-Zero

Beispiele – Würfeln mit einem Dodekaeder

$\Omega = \{\text{gerade Zahl}; \text{ungerade Zahl}\}$ – Laplace Experiment
$\Omega = \{1; 2; 3; \ldots; 11; 12\}$ – Laplace-Experiment
$\Omega = \{\text{Primzahl}; \text{keine Primzahl}\}$ – kein Laplace-Experiment
$\Omega = \{\text{Zahl kleiner 5}; \text{Zahl größer 7}\}$ – ist keine gültige Ergebnismenge und erst recht kein Laplace-Experiment

Ereignisse bei Laplace-Experimenten

Da alle Ergebnisse bei Laplace-Experimenten gleich wahrscheinlich sind, gilt für jedes Ereignis E die Berechnung:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der } \textit{günstigen} \text{ Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Beispiel Zahlenschloss

Herr Wuschke hat einen Koffer mit drei Zahlenrädern, bei denen die Ziffern 0 bis 9 einstellbar sind. Er sucht sich zufällig einen Code aus. Wie wahrscheinlich ist es, dass er einen Code mit drei gleichen Ziffern eingestellt hat?

Günstige Ergebnisse sind $000, 111, \ldots, 999$ und damit sind es 10.

$$P(E) = \frac{\cancel{10}}{\cancel{10} \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{100} = 1\%$$

Gegenereignis

Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ ist das Gegenteil eines Ereignisses E.
Es gilt:

$$P(E) + P(\overline{E}) = P(\Omega) = 1$$

Ereignis und Gegenereignis sind der Ergebnisraum.

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Beispiel dreifacher Münzwurf

Eine Münze wird dreimal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal Wappen zu werfen.

Gegenereignis $\overline{E}$: Kein Wappen werfen, also ZZZ

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(ZZZ) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87,5\%$

Baumdiagramm

Zur Veranschaulichung von (mehrstufigen) Zufallsexperimenten kann ein **Baumdiagramm** genutzt werden. Die Zweige zeigen dabei die einzelnen Ergebnisse der jeweiligen Stufe an und die Pfade sind verschiedene Ereignisse.

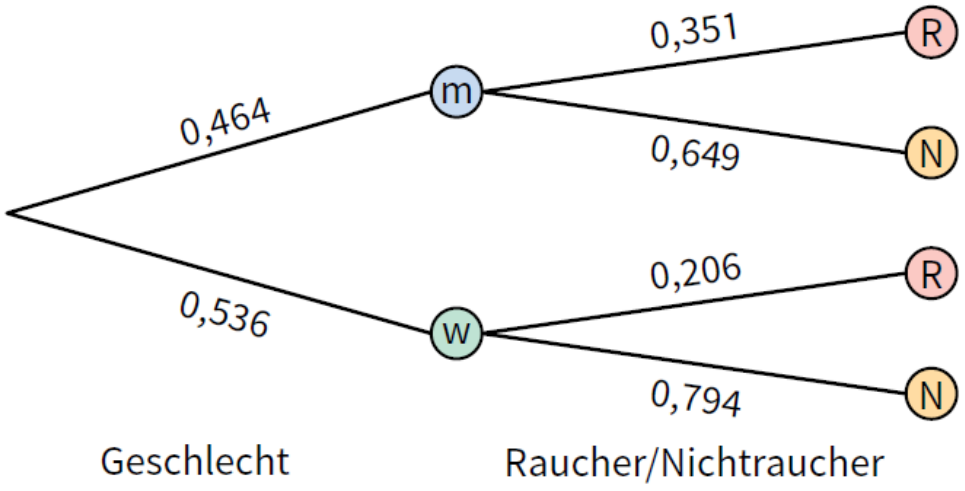


Abbildung: EdM Sachsen 11, S. 256, HW

Pfadregeln

1. Entlang des Pfades wird multipliziert.
2. Mehrere Pfade werden addiert.

Abitur MV 2011, A3

A3 Analysis und Stochastik

3.1 Bei einer Verkehrskontrolle werden die Geschwindigkeit sowie die Einhaltung der Anschnallpflicht der Fahrzeugführer kontrolliert. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass 3% der Fahrzeugführer nicht angeschnallt sind sowie 10% die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschreiten. Beide Vergehen treten unabhängig voneinander auf. Ein Fahrzeug ist vorschriftsmäßig unterwegs, wenn sein Fahrzeugführer angeschnallt ist und die zulässige Geschwindigkeit einhält. Insgesamt werden 372 Fahrzeuge überprüft.

3.1.1 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug die Kontrollstelle vorschriftsmäßig passiert.

Abitur MV 2010, B3

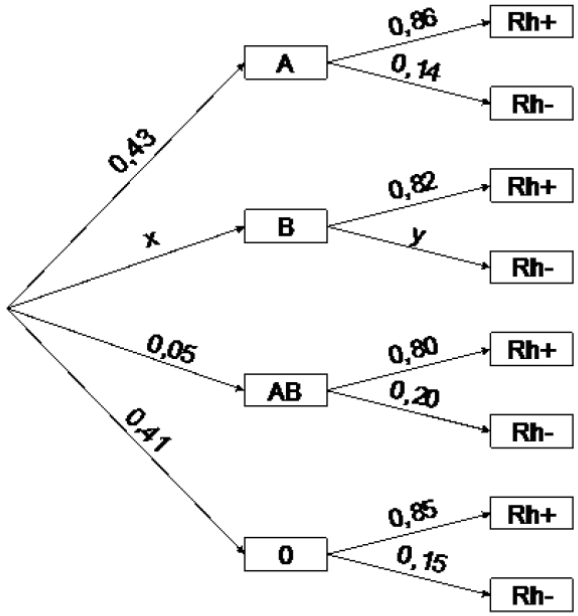


Abbildung 1: Blutgruppenverteilung in Deutschland

Empfänger \ Spender	0-	0+	B-	B+	A-	A+	AB-	AB+
AB+	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
AB-	☺	☠	☺	☠	☺	☠	☺	☠
A+	☺	☺	☠	☠	☺	☺	☠	☠
A-	☺	☠	☠	☠	☺	☠	☠	☠
B+	☺	☺	☺	☺	☠	☠	☠	☠
B-	☺	☠	☺	☠	☠	☠	☠	☠
0+	☺	☺	☠	☠	☠	☠	☠	☠
0-	☺	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠

Tabelle 1: Verträglichkeit der Blutgruppen
☺ bedeutet, dass eine Blutübertragung möglich ist

3.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für x und y aus der Abbildung 1.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Eine zufällig ausgewählte Person hat die Blutgruppe A+.
B: Eine zufällig ausgewählte Person hat den Rhesusfaktor (Rh+).
C: Eine zufällig ausgewählte Person kann von jedermann eine verträgliche Bluttransfusion erhalten.

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person mit der Blutgruppe A+ von einer zufällig ausgewählten Person eine Blutspende erhalten kann.

Nützliche Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen

Für zwei Ereignisse A und B gelten folgende Rechenregeln für die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (A \text{ und } B \text{ sind abhängig})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \qquad (A \text{ und } B \text{ sind unabhängig})$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (A \text{ und } B \text{ sind unabhängig})$$