3. Lineare Algebra und Analytische Geometrie

3.7 Winkel, Lagebeziehungen und Abstände

H. Wuschke

24. März 2022

Ziele der Sitzung

- Geradengleichungen auf ihre Lagebeziehung überprüfen
- Lagebeziehung Gerade–Ebene und Ebene–Ebene beschreiben
- Schnittpunkte/Durchstoßpunkte Gerade–Ebene berechnen
- Schnittwinkel Gerade–Ebene und Ebene–Ebene bestimmen
- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen berechnen
- Ebenengleichung in Hessescher Normalform darstellen

Erinnerung kollinear und komplanar

Gegeben sind die folgenden Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander kollinear sind.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear unabhängig sind.

c) Zeigen Sie, dass $\vec{a}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ komplanar sind.

Lagebeziehungen zweier Geraden

Zwei Geraden

$$g : \vec{x} = \vec{a} + t_1 \cdot \vec{v}; \quad t_1 \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h : \vec{x} = \vec{b} + t_2 \cdot \vec{w}; \quad t_2 \in \mathbb{R}$$

besitzen eine der folgenden vier Lagebeziehungen:

	$\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind kollinear	$\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind nicht kollinear
$g = h$ hat eine Lösung	sind identisch	schneiden sich
$g = h$ hat keine Lösung	sind parallel	sind windschief

Wenn die Richtungsvektoren kollinear sind:

Beispiel 1: g und h sind identisch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; s, t \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2: g und h sind parallel

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; s, t \in \mathbb{R}$$

Wenn die Richtungsvektoren nicht kollinear sind:

Beispiel 3: g und h schneiden sich

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; s, t \in \mathbb{R}$$

Beispiel 4: g und h sind windschief

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; s, t \in \mathbb{R}$$

Lagebeziehungen Gerade–Ebene

Eine Gerade

$$g : \vec{x} = \vec{a} + t_1 \cdot \vec{v}; \quad t \in \mathbb{R}$$

und eine Ebene

$$\varepsilon : \vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{w_1} + s \cdot \vec{w_2}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

besitzen eine der folgenden drei Lagebeziehungen:

	$\vec{v}$, $\vec{w_1}$ und $\vec{w_2}$ sind komplanar	$\vec{v}$, $\vec{w_1}$ und $\vec{w_2}$ sind nicht komplanar
$g = \varepsilon$ hat eine Lösung	g liegt in ε	schneiden sich
$g = \varepsilon$ hat keine Lösung	sind parallel	geht nicht ...

Bemerkung

Schnittpunkte von Geraden und Ebenen heißen auch Durchstoßpunkte.

Wenn die Richtungsvektoren komplanar sind:

Beispiel 5a: g liegt in ε

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \; ; r, s \in \mathbb{R}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} r = -2w + 1; s = 2 + 1; t = w; w \in \mathbb{R} \quad (\text{Lösungen } \infty)$$

$$\Rightarrow g \in \varepsilon$$

Beispiel 5b: g liegt in ε

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon : -10 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 5$$

Lösung:

$$-10 \cdot (5 - t) - 7 \cdot (-1 + 4t) + 6 \cdot (8 + 3t) = 5$$

$$-50 + 10t + 7 - 28t + 48 + 18t = 5$$

$$5 = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{wahr für alle } t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad g \in \varepsilon$$

Wenn die Richtungsvektoren komplanar sind:

Beispiel 6a: $g \parallel \varepsilon$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \; ; r, s \in \mathbb{R}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow} \text{ keine Lösung } \Rightarrow g \parallel \varepsilon$$

Beispiel 6b: $g \parallel \varepsilon$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon : -10 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 5$$

<u>Lösung:</u>

$$-10 \cdot (0 - t) - 7 \cdot (1 + 4t) + 6 \cdot (3 + 3t) = 5$$

$$10t - 7 - 28t + 18 + 18t = 5$$

$11 = 5$ ` $\Rightarrow$ falsch für alle $t \in \mathbb{R} \Rightarrow g \parallel \varepsilon$

Wenn die Richtungsvektoren <u>nicht</u> komplanar müssen sich Gerade und Ebene schneiden.

Beispiel 7a: g und ε schneiden sich

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$$

Beispiel 7a: g und ε schneiden sich

$$\begin{pmatrix}5\\-1\\8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} r = 1, s = 1, t = 0 \Rightarrow g \cap \varepsilon$$

Setzen Sie $r = 1$ und $s = 1$ in ε ein oder $t = 0$ in g ein.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}5\\-2\\8\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\8\end{pmatrix} \Rightarrow S(5|-1|8)$$

Beispiel 7b: $g \cap \varepsilon$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon : -10 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 5$$

Lösung:

$$-10 \cdot (5 + 0t) - 7 \cdot (-1 + 4t) + 6 \cdot (8 + 0t) = 5$$

$$-50 + 7 - 28t + 48 = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 - 28t = 5 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Nun muss $t = 0$ in die Geradengleichung eingesetzt werden und es ergibt sich der Schnittpunkt $S(5| - 1|8)$.

Beispiel 7c: Schnittwinkel Gerade – Ebene

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon : -10 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 5$$

Lösung:

$$\sin(\phi) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \right|} \approx |-0,51| = 0,51$$

$$\overset{\sin^{-1}}{\Rightarrow} \phi \approx 31,0^\circ$$

Lagebeziehung zweier Ebenen

Seien E und ε zwei Ebenen mit den Normalenvektoren n_E und n_ε.

- Wenn die Koordinatengleichungen von E und ε Vielfache voneinander sind, so sind die Ebenen **identisch**.
- Wenn n_E und n_ε kollinear sind und die Koordinatengleichungen von E und ε keine Vielfache sind, dann sind die Ebenen **parallel**.
- Wenn n_E und n_ε nicht kollinear sind, **schneiden sich** E und ε in einer Schnittgeraden.

Beispiel 8: Lagebeziehung von Ebenen

$E_1 : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$ ist identisch zu $E_2 : -24x_1 - 36x_2 - 12x_3 = -60$.

$E_3 : 18x_1 + 27x_2 + 9x_3 = 7$ ist parallel zu E_1 und E_2.

$E_4 : 3x_1 - 5x_3 = 0$ schneidet die anderen Ebenen.

Beispiel 9: Schnittwinkel Ebene – Ebene

$$E_1 : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \qquad E_4 : 3x_1 - 5x_3 = 0$$

Lösung:

$$\cos(\phi) = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}\right|} \approx 0,05$$

$$\stackrel{\cos^{-1}}{\Rightarrow} \phi \approx 87,4^\circ$$

Bemerkung

Bildet man im Zähler der Winkelformeln immer den Betrag, so erhält man stets spitze Winkel. Wird der stumpfe Winkel benötigt, so muss einfach der spitze Winkel von 180° abgezogen werden.

Abstand Punkt–Gerade

Sei $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{r};\ t \in \mathbb{R}$ eine beliebige Gerade.

Dann gilt für die Distanz/den **Abstand** eines beliebigen **Punktes** P **von der Geraden** g:

$$dist(P,g) = \frac{\left|(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$$

Beispiel 10: Abstand Punkt–Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad P(9|6|3)$$

$$dist(P,g) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix}\right| \approx 5,60\ LE$$

Herleitung der Formel I

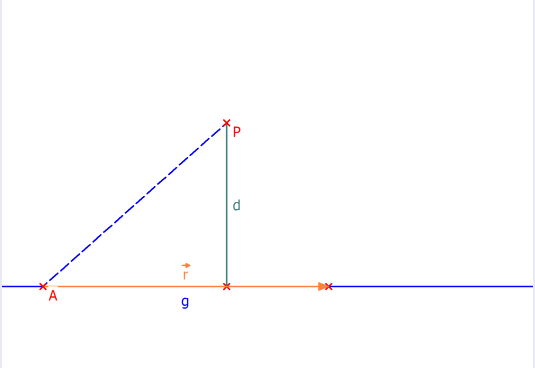

Abbildung: Abstand d eines beliebigen Punktes P von einer Geraden g

Der Abstand d ist immer eine positiv definierte Längenangabe.

Herleitung der Formel II

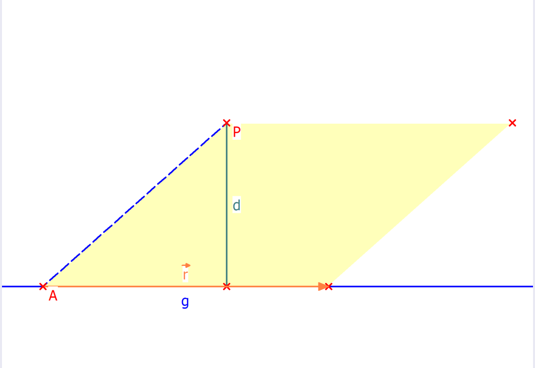

Abbildung: Aufgespanntes Parallelogramm durch $\vec{r}$ und $\overrightarrow{AP}$

Für den Flächeninhalt des Parallelogrammes gilt: $|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}| = |\vec{r}| \cdot d$

Somit ist $d = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} \overset{\text{Richtungsvektor}}{=} \dfrac{|(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$

Abstand Punkt–Ebene

Sei eine Ebene $E : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ sowie ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ gegeben. Dann wird der **Abstand** zwischen **Punkt und Ebene** durch folgende Formel berechnet:

$$dist(P; E) = \frac{|\vec{n} \circ \overrightarrow{OP} - d|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{n} \circ \overrightarrow{OP} - d|$$

Beispiel 11: Abstand Punkt–Ebene

$$E : 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 17 \qquad P(9|6|3)$$

$$dist(P, E) = \frac{|2 \cdot 9 + 5 \cdot 6 - 8 \cdot 3 - 17|}{\sqrt{93}} = \frac{7}{\sqrt{93}} \approx 0,73\ LE$$

Was ist wenn der Punkt zur Ebene gehört?

Wenn der Punkt zur Ebene gehört, dann wird der Zähler Null und damit ist der Abstand des Punktes von der Ebene gleich Null.

Hessesche Normalform

Sei $\varepsilon : \vec{n} \circ \overrightarrow{OX} = d$ eine Ebene in Koordinatenform. Sei $A(a_1|a_2|a_3)$ ein beliebiger Punkt auf der Ebene ε. Dann ist die Ebenengleichung

$$\varepsilon : \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{n} \circ \overrightarrow{OX} - d| = 0$$

die **Hessesche Normalform** der Ebene ε.

Bemerkung

Die Hessesche Normalform ist benannt nach dem Mathematiker Otto Hesse (1811–1874). Sie definiert die Ebene über die Menge aller Punkte ($\overrightarrow{OX}$), die den Abstand 0 zur Ebene haben.

Es gibt also in der Schule drei Darstellungsformen von Ebenen:

- Parameterform (über Bewegung auf der Ebene definiert)
- Koordinatenform (über Punktkoordinaten definiert)
- Hessesche Normalform (über Abstand zur Ebene definiert)

Beispiel 12: Von der Parameterform zur Hesseschen Normalform

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 7 \quad \rightarrow \quad E : 15x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 7$$

$$\vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{325}} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E : \frac{1}{\sqrt{325}} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \vec{x} \right) - 7 \right| = 0$$

Beispiel 13: Von der Koordinatenform zur Parameterform

$$E: -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -12 \quad \rightarrow \quad P_1(4|0|0), P_2(0|-3|0), P_3(0|0|12)$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E: \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} \right) + 12 \right| = 0$$

Abstand windschiefer Geraden

Seien die zwei Geraden g und h windschief mit

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t_1 \cdot \vec{r};\ t_1 \in \mathbb{R} \qquad h : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + t_2 \cdot \vec{s};\ t_2 \in \mathbb{R}$$

Dann ist der Abstand beider windschiefer Geraden

$$dist(g,h) = \frac{\left| det(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}) \right|}{|\vec{r} \times \vec{s}|} = \frac{\left| (\vec{r} \times \vec{s}) \circ \overrightarrow{AB} \right|}{|\vec{r} \times \vec{s}|}$$

Beispiel 14: Abstand windschiefer Geraden g und h

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \;; s, t \in \mathbb{R}$$

$$dist(g, h) = \frac{\left| det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-124|}{\sqrt{560}} \approx 5,24 \; LE$$