3. Lineare Algebra und Analytische Geometrie

3.5 Skalarprodukt und Kreuzprodukt von Vektoren

H. Wuschke

24./25. Februar 2022

Ziele der Sitzung

- Skalarprodukte von Vektoren bilden
- Eigenschaft orthogonaler Vektoren nennen
- Winkel zwischen Vektoren berechnen
- Kreuzprodukt von Vektoren bilden
- den Nutzen des Kreuzproduktes für senkrechte Vektoren und die Fläche des Parallelogramms (eines Dreiecks) beschreiben
- Konzept des Spatproduktes bzw. der Determinante zur Volumenberechnung nutzen

Skalarprodukt

Das (euklidische) **Skalarprodukt** $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$ wird beschrieben durch:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + (-5) \cdot 2 = 12 - 6 - 10 = -4$$

Leistungskursexkurs I

In der mathematischen Notation wird das euklidische Skalarprodukt über die Matrizenmultiplikation von zwei Vektoren folgendermaßen definiert:

$$\langle ., . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\langle v, w \rangle = v^T \cdot w = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot w_k = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n$$

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(S1) $\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ (Homogenität)

(S2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (Additivität)

(S3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie)

(S4a) $\langle x, x \rangle \geqq 0$ (Positive Definitheit)

(S4b) $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \vec{0}$

Leistungskursexkurs II

Manchmal werden die Skalarproduktaxiome Homogenität und Additivität für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ zusammengefasst als

$$\langle \lambda \cdot x + y, z \rangle = \lambda \cdot \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

Aufgrund der Additivität und der Homogenität des Skalarproduktes bezeichnet man dieses auch als bilineare Abbildung, denn es werden zwei (bi) Elemente für eine lineare Abbildung verwendet. Lineare Abbildungen sind folgendermaßen definiert.

Sei $f : V \to W$ und $x, y \in V$ (Vektorraum) sowie $\lambda \in K$ (Körper)

(L1) $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$ (Homogenität)

(L2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (Additivität)

Leistungskursexkurs III

Die euklidische Norm ist definiert als $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derart, dass für einen Vektor $\vec{a}$ gilt:

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

Es gelten die folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

(N1) $\|x\| \geqq 0$ (Nichtnegativität)

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$ (Definitheit)

(N3) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (Homogenität)

(N4) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **orthogonal** bzw. senkrecht zueinander, genau dann wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

Aufgabe A1

Bestimmen Sie p so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander sind:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe A2

Beurteilen Sie, welches Viereck $ABCD$ durch die Punkte $A(3|4|7)$, $B(5|6|3)$, $C(6|9|4)$ und $D(4|7|8)$ bestimmt wird.

Rechenregeln für das Skalarprodukt

Für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sowie eine beliebige Zahl $k \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ (Kommutativgesetz)
2. $(k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$
3. $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$ (Distributivgesetz)
4. $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$ beziehungsweise $\sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = |\vec{a}|$

Bemerkung

Hier stecken die Skalarproduktaxiome S1 bis S4a dahinter.

Winkel zwischen Vektoren

Für den Winkel ϕ, der von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen wird, gilt:

$$\cos(\phi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Bemerkung

Da der $\cos(90^\circ) = 0$ ist, sind Vektoren senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

Aufgabe A3

Berechnen Sie die Innenwinkel des Vierecks $ABCD$, welches durch die Punkte $A(3|4|7)$, $B(5|6|3)$, $C(6|9|4)$ und $D(4|7|8)$ beschrieben wird.

Kreuzprodukt/Vektorprodukt

Das **Kreuzprodukt** $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bildet einen dritten Vektor $\vec{n}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b \\ z_a \cdot x_b - x_a \cdot z_b \\ x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Es gilt dabei: $\vec{n} \perp \vec{a}$ und $\vec{n} \perp \vec{b}$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & - & (-5) \cdot (-3) \\ -5 \cdot 4 & - & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-3) & - & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -26 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Auch das Kreuzprodukt ist eine bilineare Abbildung.

Eigenschaften des Vektorproduktes

Neben der Orthogonalität bilden die Vektoren ein Rechtssystem[a].

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ gibt den Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms an.

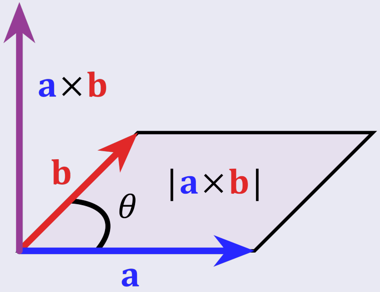


Abbildung: Veranschaulichung CC0

[a] Siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Rechtssystem_(Mathematik)`

Aufgabe A4

Berechnen Sie die den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$, welches durch die Punkte $A(3|4|7)$, $B(5|6|3)$, $C(6|9|4)$ und $D(4|7|8)$ beschrieben wird.

Aufgabe A5

In einem kartesischen Koordinatensystem wird das gerade Prisma $ABCDEF$ betrachtet. $A(0|-4|0)$, $B(\sqrt{20}|0|0)$ und $C(0|4|0)$ sind die Eckpunkte der Grundfläche.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC im Punkt B nicht rechtwinklig ist.

b) Der Inhalt der Mantelfläche des Prismas ist 60. Bestimmen Sie die Höhe des Prismas.

Aufgabe A6

Begründen Sie, dass gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\phi)$$

Für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und den eingeschlossenen Winkel ϕ.

Aufgabe A7

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$ und $C(-4|8|5)$ gegeben.

1. Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.
2. Weisen Sie nach, dass
   - der Punkt $M(-2|4|3)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist;
   - das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel hat.
3. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, für den das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

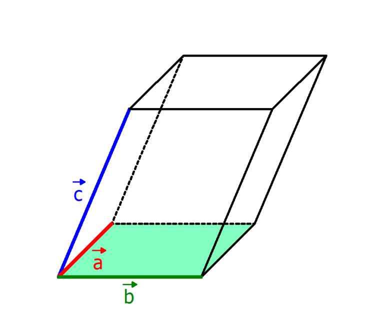
Spatprodukt

Drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ spannen einen Spat auf. Zur Berechnung des Volumens dieses Spates ist das **Spatprodukt** definiert:

$$V = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|$$

Bei Rechtssystemen kann der Betrag weggelassen werden.

Veranschaulichung eines Spats (H. Wuschke, MatheGrafix 11, 2022)



Determinante

Bildet man aus $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ die Matrix $\mathbb{A} = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so wird die Abbildung $det : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$det(\mathbb{A}) = det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$$

als **Determinante** von $\mathbb{A}$ bezeichnet.

Es gilt:

$$det(\mathbb{A}) = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

Lineare Abhängigkeit

Für linear abhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0.$$

rechnerischer Nachweis

Zu zeigen:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3$$

Jetzt wird die Summe in positive und negative Summanden sortiert.

$$= a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Werden nun die Faktoren so vertauscht, dass immer die erste Komponente bei den positiven Summanden und die dritte Komponente bei den negativen Summanden vorne steht, dann steht es fast da.

$$= c_1 a_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 + a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

Aufgabe A8

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die drei Vektoren in einem kartesischen Koordinatensystem grafisch dar. Nehmen Sie dafür den Ursprung als Ortsvektor.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms bzw. des Dreiecks, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

c) Berechnen Sie das Volumen des Spats, welches durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

d) In diesem Spat liegen verschiedene, volumengleiche Pyramiden, welche das Parallelogramm aus b) als Grundfläche besitzen. (Prinzip von Cavalieri)
Berechnen Sie das Volumen einer dieser Pyramiden.

e) Berechnen Sie abschließend das Volumen der dreieckigen Pyramide, welche durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.