3. Lineare Algebra und Analytische Geometrie

3.4 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

H. Wuschke

02. Februar 2022

Ziele der Sitzung

- lineare Abhängigkeit grafisch deuten können
- lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit rechnerisch nachweisen
- Begriffe *kollinear* und *komplanar* beschreiben und untersuchen

Erinnerung Linearkombination

Seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben.

Bilden Sie die Linearkombinationen

$$\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \vec{b}$$

und

$$\vec{d} = -3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}.$$

Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit von Vektoren

Für drei Vektoren[a] $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gibt es für die Lösung der Linearkombination

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

folgende Möglichkeiten:

1. Nur $r = s = t = 0$ löst die Gleichung. Dann sind die Vektoren **linear unabhängig** voneinander.
2. Außer der Lösung $r = s = t = 0$ gibt es noch andere Lösungen. Dann ist mindestens ein Vektor eine Linearkombination der anderen und sie sind **linear abhängig** voneinander.

[a] $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ und $\vec{c} \neq \vec{0}$

Beispiele

Die folgenden Vektoren sind linear abhängig voneinander:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren sind immer linear unabhängig voneinander:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe A1

Es sind immer drei Vektoren vorgegeben. Bei einer Auswahl handelt es sich um linear unabhängige Vektoren. Begründen Sie dies.

a) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{c_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

kollinear, komplanar

Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig voneinander, heißen sie **kollinear** zueinander.

$$r \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

Sie liegen dann auf einer Geraden (lat. *linea*).

Sind drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig voneinander, heißen sie **komplanar** zueinander.

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}$$

Sie liegen dann in einer Ebene (lat. *planus*).

Beispiel kollinear

Die folgenden Vektoren sind jeweils kollinear zueinander:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Denn $-1 \cdot \vec{a} = \vec{b}$ oder $-2 \cdot \vec{b} = \vec{c}$ oder $0,5 \cdot \vec{b} = \vec{d}$.

Beispiel komplanar

Die folgenden Vektoren sind zueinander komplanar zueinander (siehe Aufgabe A1).

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{c_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denn: $2 \cdot \vec{a_1} + (-1) \cdot \vec{b_1} = \vec{c_1}$