3. Lineare Algebra und Analytische Geometrie

3.3 Vektoren im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$

H. Wuschke

24. Januar 2022

Ziele der Sitzung

- Vektorraumaxiome als definierende Eigenschaften des *euklidischen Vektorraumes* beschreiben
- Begriff des *Richtungsvektors*, *Gegenvektors* und *Nullvektors* beschreiben können
- Addition und Vielfachbildung von Vektoren ausführen
- Begriff der Linearkombination kennenlernen
- Länge/Betrag/Norm eines Vektors berechnen
- Einheitsvektoren bilden

Euklidischer Vektorraum

Es sei $\mathbb{R}^n$ eine Menge über dem Körper $\mathbb{R}$ mit der dort definierten Addition und Multiplikation. Dann bildet $\mathbb{R}^n$ einen n-dimensionalen, **euklidischen Vektorraum**, wenn die Vektoraddition und Skalarmultiplikation erfüllt ist.

Vektoraddition

Seien $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

V1: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (Assoziativgesetz)

V2: Es gibt einen **Nullvektor** (*neutrales Element*) $\vec{0}$ so, dass gilt:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

V3: Es gibt zu jedem Vektor $\vec{v}$ einen **Gegenvektor** (*inverses Element*) $-\vec{v}$ so, dass gilt:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$$

V4: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ (Kommutativgesetz)

Skalarmultiplikation

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt:

S1 : $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) + (\alpha \cdot \vec{v})$ (Distributivgesetz I)

S2 : $(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = (\alpha \cdot \vec{v}) + (\beta \cdot \vec{v})$ (Distributivgesetz II)

S3 : $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v})$ (Assoziativgesetz)

S4 : $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Bemerkungen

- In der Schule werden alle bekannten Rechengesetze verwendet und auf den Vektorraum übertragen. Dann heißt er reeller euklidischer Vektorraum. Es gibt auch andere Vektorräume, wichtig ist dabei, dass die Axiome erfüllt werden.
- Ein Vektorraum über $\mathbb{Z}$ wird als Modul bezeichnet.
- Die Vektorraumdefinition ist auch auf Funktionenräume und unendlichdimensionale Vektorräume übertragbar.
- In den Axiomen S2 und S3 kommen unterschiedliche Multiplikationen und Additionen vor.

Richtungsvektor

Ein **Richtungsvektor** bzw. **Verbindungsvektor** $\overrightarrow{AB}$ beschreibt den Vektor, welcher von Punkt A zu Punkt B verläuft bzw. die Punkte A und B von A aus verbindet.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Aufgabe A1

Gegeben seien die Punkte $A(-4|-3), B(-1|-1)$ und $C(-3|2)$ im $\mathbb{R}^2$.

a) Stellen Sie A, B und C sowie $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ graphisch dar.

b) Stellen Sie in einem zweiten Koordinatensystem $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$ graphisch dar.

c) Gegeben ist ein Verbindungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie $\vec{v}$ an jeden der drei Punkte und beschreiben Sie die Verschiebung.

Verbindungsvektoren

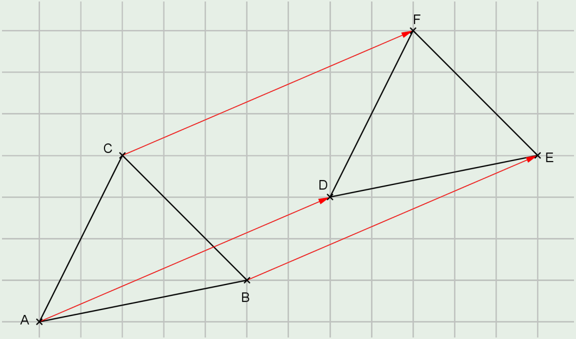

Abbildung: Beispiel von S. Hintze, 23.05.19

Hier sind die Vektoren $\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BE}$ dargestellt.
Da alle Vektoren die gleiche Länge, Richtung (parallel) und den gleichen Richtungssinn haben, gilt:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BE}$$

Addition von Vektoren

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stellen zwei Verschiebungen dar. Die Hintereinanderausführung dieser Verschiebungen wird als Summe

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_a+x_b \\ y_a+y_b \\ z_a+z_b \end{pmatrix}$$

der beiden Vektoren bezeichnet.

Veranschaulichung der Addition

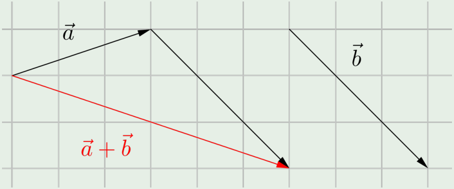

Abbildung: Beispiel von S. Hintze, 23.05.19

Vielfachbildung eines Vektors

Gegeben seien der Vektor $\vec{a}$ und die Zahl $r \in \mathbb{R}$.
Es gilt:

$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot x_a \\ r \cdot y_a \\ r \cdot z_a \end{pmatrix}$$

Der neue Vektor $r \cdot \vec{a}$ bezeichnet den Vektor, dessen Pfeile ...

1. ... **parallel** zu den Pfeilen von $\vec{a}$ sind.
2. ... $|r|$ mal so lang wie die Pfeile von $\vec{a}$ sind.
3. ... gleich gerichtet zu den Pfeilen von $\vec{a}$ sind, falls $r > 0$ und entgegengesetzt gerichtet zu den Pfeilen von $\vec{a}$ sind, falls $r < 0$.

Veranschaulichung der Vielfachbildung

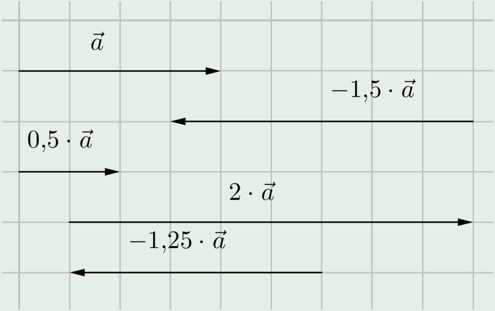

Abbildung: Beispiel von S. Hintze, 23.05.19

Subtraktion von Vektoren

Der Gegenvektor von $\vec{b}$ wird mit $-\vec{b}$ bezeichnet.
Die Hintereinanderausführung der Verschiebungen $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ ist die Differenz von $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_b \\ -y_b \\ -z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix}$$

Veranschaulichung der Subtraktion

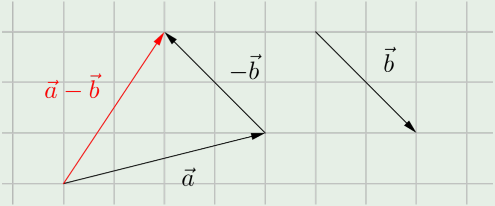

Abbildung: Beispiel von S. Hintze, 23.05.19

Linearkombination

Seien $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ (reelle Skalare/Koeffizienten) und $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}$ Vektoren.

Ein Rechenausdruck aus Skalaren und Vektoren wird als **Linearkombination** bezeichnet.

$$a_1 \cdot \vec{x_1} + a_2 \cdot \vec{x_2} + ... + a_n \cdot \vec{x_n}$$

Aufgabe A2

Gegeben sind die Punkte $A(1|1|0)$, $B(4|2|-3)$ und $C(3|5|-1)$.

a) Bilden Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CB}$

b) Berechnen Sie $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt und begründen Sie dies mit einer Skizze.

c) Berechnen Sie die Linearkombination $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$.

d) Berechnen Sie $2 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{CA}$

Betrag/Norm eines Vektors

Der **Betrag** oder die **Norm** des Vektors $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ beschrieben. $|\vec{a}|$ gibt die Länge des Vektors $\vec{a}$ an. Für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$$

gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2 + (z_a)^2}.$$

Der Vektor $\vec{a_0}$ heißt **Einheitsvektor** zum Vektor $\vec{a}$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{a_0}$ die gleiche Richtung haben und $|\vec{a_0}| = 1$ gilt. Es gilt:

$$\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

Aufgabe A3

Gegeben sind die Punkte $A(1|1|0)$, $B(4|2|-3)$ und $C(3|5|-1)$.

a) Berechnen Sie die Beträge $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ und $|\overrightarrow{AC}|$.

b) Ergänzen Sie einen Punkt D so, dass die Figur $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

c) Begründen Sie, dass $ABCD$ keine Raute/kein Rhombus ist.

Aufgabe A4

Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\overrightarrow{a_0}$ und $\overrightarrow{b_0}$ der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$