3. Lineare Algebra und Analytische Geometrie

3.2 Punkte und Objekte im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$

H. Wuschke

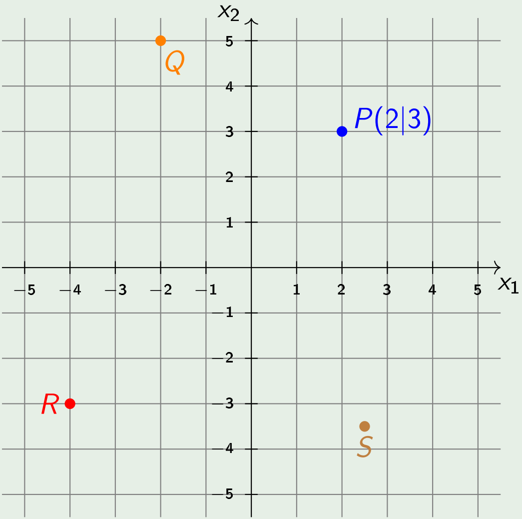
19. Januar 2022

Ziele der Sitzung

- Punkte und Figuren im kartesischen Koordinatensystem eintragen
- Punkte auf den Koordinatenachsen bzw. nach Möglichkeit ablesen
- Begriff des *Vektors* kennenlernen (phänomenologisch)
- Begriff des *Ortsvektors*, *Richtungsvektors* und *Gegenvektors* beschreiben
- Mittelpunkte bilden

Beispiel für Punkte im $\mathbb{R}^2$

Lesen Sie die x_1- und x_2-Koordinaten der Punkte Q, R und S ab. Beschreiben Sie, wie Sie dabei vorgehen.



Beispiel für Punkte im $\mathbb{R}^3$

Im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem erfolgt das Eintragen der Punkte analog, nur mit einer dritten Richtung.

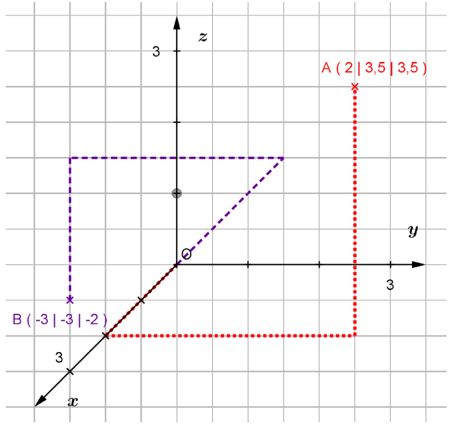


Abbildung: Beispiel von S. Hintze 23.05.2019

Bemerkung

Das Ablesen der Punkte ist selten ohne Weiteres eindeutig möglich, da jeder Punkt nun auch in der Tiefe (x-Richtung oder x_1-Richtung) verschoben sein kann.

Liegt ein Punkt auf einer der drei Koordinatenachsen, so kann davon ausgegangen werden, dass dieser eindeutig ablesbar ist, auch wenn dies nicht allgemeingültig ist.

Punkt, Vektor, Ortsvektor

Alle Objekte mit einer Länge, Richtung und einem Richtungssinn heißen **Vektoren**. Sie werden häufig durch Pfeile dargestellt. Ein **Punkt** ist ein Objekt eines Raumes. Der **Ortsvektor** beschreibt die Bewegung zu diesem Punkt vom Koordinatenursprung aus.

$$B(-3|-3|-2) \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe A1

a) Stellen Sie den folgenden Quader in einem Koordinatensystem dar. Dabei soll A im Koordinatenursprung liegen.

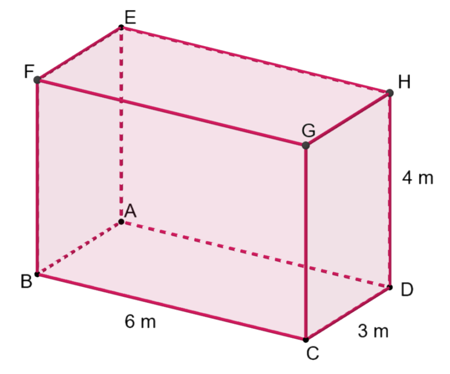


Abbildung: GeoGebra H. Wuschke 29.01.2020, CC0

Aufgabe A1

b) Nun soll ein 1,5 m hohes Dach auf dem Quader errichtet werden. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte D_1 und D_2.

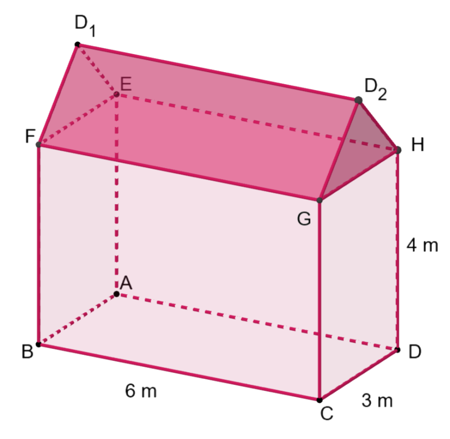


Abbildung: GeoGebra H. Wuschke 29.01.2020, CC0

Aufgabe A1

c) Zum Schluss wird das Haus unterkellert. Die Eckpunkte sind dabei die beiden Mittelpunkte von $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sowie C und D. Bestimmen Sie wiederum die Koordinaten von P_1 bis P_4.

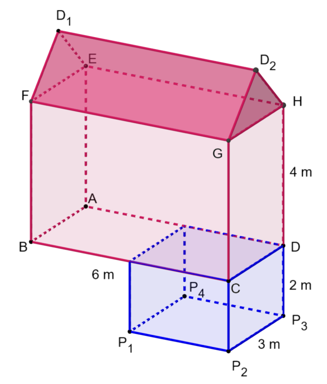


Abbildung: GeoGebra H. Wuschke 29.01.2020, CC0

Mittelpunkt

Ein **Mittelpunkt** wird koordinatenweise durch das arithmetische Mittel aller zugrundeliegenden Punkte beschrieben.

$$M\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\,\middle|\,\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\,\middle|\,\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}\right)$$

Bemerkungen

1. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist also:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,\middle|\,\frac{y_A+y_B}{2}\,\middle|\,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

2. Der Mittelpunkt oder Schwerpunkt des $\triangle ABC$ ist also:

$$M\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\,\middle|\,\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\,\middle|\,\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

Richtungsvektor

Ein **Richtungsvektor** $\overrightarrow{AB}$ beschreibt den Vektor, welcher von Punkt A zu Punkt B verläuft.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Gegenvektor

Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ ist der **Gegenvektor** zu $\overrightarrow{AB}$. Beide haben die gleiche Länge und Richtung, aber einen anderen Richtungssinn.
Es gilt:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Begründung: Übungsaufgabe 5

Aufgabe A2

Gegeben sind die Punkte $A(6|4|0)$, $B(2|6|2)$, $C(-2|-4|1)$ eines Dreiecks ABC.

a) Stellen Sie das $\triangle ABC$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

b) Zeichnen Sie den Ortsvektor auf A in das Koordinatensystem ein und bezeichnen Sie diesen mit $\overrightarrow{OA}$.

c) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$ und zeichnen Sie diese farbig ein.

d) Geben Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des $\triangle ABC$ an und tragen Sie diesen ebenfalls ein.

e) Geben Sie die Koordinaten von $M_{\overline{AB}}$, $M_{\overline{BC}}$ und $M_{\overline{AC}}$ an.