2. Differentialrechnung

2.10 Extremwertprobleme

H. Wuschke

10. Januar 2022

Ziele der Sitzung

- Mit Hilfe der Differentialrechnung Extremwertprobleme lösen
- Zielfunktion mithilfe gegebener Nebenbedingung aufstellen
- Planimetrische und stereometrische Formeln im Tafelwerk finden

Aufgabe A1

Frieda Fröhlich möchte gerne Erdmännchen züchten, da diese possierlichen Tierchen sie stets erheitern. Erdmännchen sind jedoch Wildtiere, deshalb ist es verboten, sie im Haus zu halten. Frieda kauft sich insgesamt 40 m Glasplatten (mit einer Dicke von 19 mm und einer Höhe von 1,5 m), welche das Gehege einzäunen sollen. Bevor jedoch weitere Planungsschritte erfolgen (genügend großer Sandhaufen, Bodenabdichtung, Schutzhaus mit Wärmelampe), muss die Fläche geplant werden. Frieda hat dafür zwei Optionen:

Option 1 – frei liegendes Gehege

Option 2 – Gehege an einer Hauswand

Damit die agilen Erdmännchen auch genügend Auslauf haben, soll die umzäunte Fläche maximal sein.
Bestimmen Sie für beide Optionen die maximale Fläche.

Lösungsnotizen Aufgabe A1 – Option 1

Umfang des Geheges 40 m; Flächeninhalt soll maximal werden

Option 1

Zielfunktion

$$A(a,b) = a \cdot b$$

$$\begin{aligned} A(a,b) &= a \cdot b \\ A(b) &= (20-b) \cdot b \quad = 20b - b^2 \end{aligned}$$

Nebenbedingung

$$\begin{aligned} u(a,b) &= 2 \cdot (a+b) \\ 40 &= 2 \cdot (a+b) \\ 20 - b &= a \end{aligned}$$

Grafische Ermittlung des Maximums der Funktion $A(b)$ ergibt $H(10 \mid 100)$. Also für $b = 10$ m und damit auch $a = 10$ m ist der maximale Flächeninhalt 100 m^2.

Aufgabe A1 – Option 2

Durch die veränderte Nebenbedingung ergibt sich auch eine andere Zielfunktion. Die Lösung ist im essentiellen: Eine Seite ist 10 m und eine Seite ist 20 m lang, daher ist der maximale Flächeninhalt 200 m^2.

Extremwertprobleme

Bei Extremwertproblemen soll ein extremer (maximaler/minimaler) Wert für eine Größe in einer Sachsituation (Zielfunktion) unter Nutzung einer Nebenbedingung bestimmt werden.

Satz vom Maximum und Minimum (vgl. 23.09.2021)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gibt es stets Argumente $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ derart, dass für jedes Argument $x \in [a, b]$ die folgende Ungeichung erfüllst ist:

$$f(x_{min}) \leqq f(x) \leqq f(x_{max})$$

Bemerkungen

1. Die Zielfunktion hat mehrere Variablen und wird durch Nebenbedingungen zu einer Funktion mit einer Variablen umgeformt.
2. Extrema können auch am Rand ($f(a)$ oder $f(b)$) sein.

Aufgabe A2

Modellieren Sie ein Reagenzglas mithilfe einfacher Körper. Es soll ein Fassungsvermögen von 40 cm^3 aufweisen.
Bestimmen Sie bei welchen Abmessungen sich ein minimaler Materialverbrauch ergibt. Bewerten Sie das erhaltene Ergebnis.

Aufgabe A3

Es einem quadratischen Stück Papier mit einer Seitenlänge von 20 cm soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden. Dazu werden an allen vier Ecken gleich große Quadrate aus gespart und anschließend die vier Ränder nach oben gebogen. Berechnen Sie, für welche Höhe das Volumen dieser Schachtel maximal ist.

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x-2)^2 + 1,5$ für $0 \leqq x \leqq 2$.
Von allen achsenparallelen Rechtecken mit dem Ursprung als einem Eckpunkt und dem Punkt $P(x \mid f(x))$ als gegenüberliegendem Eckpunkt ist dasjenige mit maximalem Flächeninhalt zu bestimmen.

Schrittfolge bei Extremwertproblemen an Funktionsgraphen

1. Erstellen einer Funktionsgleichung für die zu optimierende Größe
   a) Größen in einer Skizze festhalten
   b) Extremalbedingung
   c) Nebenbedingung
   d) Zielfunktion
   e) Definitionsbereich der Zielfunktion
2. Ermitteln der Extrempunkte der Zielfunktion
   a) Graphikmodus oder Berechnung mit Ableitungen der Zielfunktion
   b) Ränder überprüfen (Randbedingung)
3. Ergebnis mit allen relevanten Größen angeben und im Sachverhalt beurteilen.