3. Lineare Algebra und Analytische Geometrie

3.1 Matrizen, LGS & Gaußalgorithmus

H. Wuschke

26. November 2021

Ziele der Sitzung

- Matrizen schreiben können
- Erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme mit Gaußalgorithmus lösen
- Lösung von Gleichungssystemen angeben

Matrix

Seien $m, n \in \mathbb{N}$

(a) Eine $m \times n$ Matrix $\mathbb{A}$ über $\mathbb{R}$ ist eine Anordnung von $m \cdot n$ reellen Zahlen in ein rechteckiges Schema aus m Zeilen und n Spalten:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbb{R}, \\ i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

Andere Notation: $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

Die Menge aller $m \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$ wird mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet.

Transponierte Matrix

Seien $m, n \in \mathbb{N}$

(b) Ist $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und ist ${a_{ij}}^T := a_{ji}$, so heißt die Matrix

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

heißt transponierte Matrix von $\mathbb{A}$.

Beispiel

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Aufgaben A1

1. Gegeben sind folgende Matrizen:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \\ 11 & 32 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 9 & 0,3 & -2 \\ 12 & 4,8 & -4 \\ 0 & 1 & 16 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & -10 \\ 0,9 & 4,8 & 3,2 & 1,2 & 5 \end{pmatrix}$$

   Geben Sie jeweils den euklidischen Vektorraum an, aus dem diese Matrizen kommen sowie die transponierten Matrizen $\mathbb{A}^T, \mathbb{B}^T, \mathbb{C}^T$.

2. Geben Sie jeweils zwei Matrizen aus den folgenden euklidischen Vektorräumen an:
   1. $\mathbb{R}^{2\times 4}$
   2. $\mathbb{R}^{5\times 3}$
   3. $\mathbb{R}^{3\times 1}$

Addition und skalare Multiplikation

Auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ definiert man eine Addition durch

$$+ : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}, \quad (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$$

und eine Skalarmultiplikation durch

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \lambda \cdot (a_{ij}) := (\lambda \cdot a_{ij})$$

Beispiel

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad -3 \cdot \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -6 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Wir multiplizieren Matrizen durch das Prinzip „Zeile · Spalte“

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 3 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ !

Matrizenmultiplikation

Matrizen müssen für die Multiplikation „verkettet“ sein.

$$\underbrace{\mathbb{A}}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}} \cdot \underbrace{\mathbb{B}}_{\in\mathbb{R}^{n\times p}} = \underbrace{\mathbb{A}\mathbb{B}}_{\in\mathbb{R}^{m\times p}}$$

Beispiel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{3\times 2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 2}}$$

Hinführung zu Gleichungssystemen

Multiplizieren wir eine Matrix

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & + & a_{12} & + & \cdots & + & a_{1n} \\ a_{21} & + & a_{22} & + & \cdots & + & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & + & a_{m2} & + & \cdots & + & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

so erhält man eine Koeffizientenmatrix.

Lineares Gleichungssystem

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

besteht aus m Gleichungen, n Unbekannten und den Koeffizienten a_{ij} $(i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$.

Es heißt homogen, wenn $b_i = 0$, sonst heißt es inhomogen.
Ein geordnetes n-Tupel $(y_1, ..., y_n)$ reeller Zahlen ist ein Element der Lösungsmenge, wenn es gleichzeitig die m Gleichungen löst.

Es gibt eine eindeutige Lösung, unendlich Lösungen (Lösungsschar mit Parametern) oder keine Lösung.

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Jedes LGS kann auch als erweiterte Koeffizientenmatrix dargestellt werden:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Äquivalente Umformungen bei LGS

Beim Vereinfachen des LGS, dürfen folgende Schritte gemacht werden:

1. Eine Gleichung mit einem reellen Faktor (außer 0) multiplizieren.
2. Zwei Gleichungen miteinander vertauschen.
3. Eine Gleichung zu einer anderen aufaddieren.

Aufgaben A2

1. Geben Sie zu dem gegebenen Gleichungssystemen die erweiterte Koeffizientenmatrix an.

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 4x & - & 5y & - & 2z & = & 3 \\ 6x & + & y & - & 5z & = & 9 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & & & + & 2z & = & -1 \\ 4x & - & 5z & - & 2y & = & 3 \\ 6y & + & z & - & 5x & = & 9 \end{array}$$

2. Geben Sie zu der gegebenen erweiterten Koeffizientenmatrix jeweils das Gleichungssystem an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 12 & 4 \\ -6 & -6 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 15 & 3 \end{array}\right)$$

Gaußalgorithmus

Ziel des Gaußalgorithmus: Ein zum Ausgangssystem äquivalentes „gestrafftes" System zu konstruieren.

Dreiecksgestalt (eindeutige Lösung)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}$$

Trapezgestalt (unendlich viele Lösungen)

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

andere Gestalt (keine Lösung)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 4 \end{array}$$

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Abbildung: CC0

- Verfahren schon vorher bekannt, z.B. *Logistica* (1559) von J. Buteo (frz. Math.; 1492–1572)
- vielseitig begabt in verschiedenen Bereichen der Mathematik, aber auch in Physik, Astronomie oder Geographie
- Gauß systematisiert und überträgt das Verfahren auf Matrizen
- 1801 *Disquisitiones arithmeticae*

Beispiel 1 – eindeutige Lösung

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & = & 10 \\ x & + & 2z & + & 3y & = & 6 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{II-2I}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-I}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{III-II}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 3 & \qquad\qquad \to x = 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 4 & \to y = 1 \\ & & & & -z & = & -1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel 2 – keine Lösung

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & = & 10 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \overset{II-2I}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-I}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$0 = 3$ ist ein Widerspruch

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \emptyset = \{\}$$

Die Lösungsmenge ist leer.

Beispiel 3 – mehrdeutige Lösung

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \\ -2x & - & 2y & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right) \underset{III+2I}{\overset{II-I}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{I-II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x = 1 \text{ und } y + z = 2.$$

Setze $z = t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y + t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 - t$

$$\rightarrow \begin{array}{rcrr} x & = & 1 & \\ y & = & 2 & -t \\ z & = & & t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgaben A3

Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender LGS:

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 4x & - & 5y & - & 2z & = & 3 \\ 6x & + & y & - & 5z & = & 9 \end{array}$$ (eindeutig)

2. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -4 \end{array}$$ (keine Lösung)

3. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -5 \end{array}$$ (ein Parameter)

4. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} w & + & 2x & + & 3y & + & 4z & = & 5 \\ 2w & + & 3x & + & 4y & + & 5z & = & 6 \\ 3w & + & 4x & + & 5y & + & 6z & = & 7 \\ & & x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$ (zwei Parameter)