

2. Differentialrechnung

2.8 Funktionsbestimmung

H. Wuschke

06. Dezember 2021

Ziele der Sitzung

- allgemeine Funktionsgleichungen angeben
- aus gegebenen Informationen Gleichungen aufstellen
- das lineare Gleichungssystem lösen und die Funktionsgleichung bestimmen

Aufgabe A1

Leiten Sie die gegebenen Funktionen jeweils zweimal nach x ab.

① $f : x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

② $g : x \mapsto a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

③ $h : x \mapsto a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

④ $k : x \mapsto a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$

Aufgabe A2

Bestimmen Sie eine Funktion zweiten Grades, welche durch folgende Punkte beschrieben wird:

① $P_1(-3|18), P_2(2|8), P_3(4|32)$

② $P_1(0|-3), P_2(-3|0), P_3(1|-2)$

Funktionsbestimmung

Ziel der Funktionsbestimmung ist es, in der Regel eine ganzrationale Funktion vom Grad n zu bestimmen.

Gesucht: $f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-2} \cdot x^2 + a_{n-1} \cdot x + a_n$

Methode: Lineares Gleichungssystem aufstellen

Die Funktionsgleichung hat $n + 1$ unbekannte Koeffizienten, also benötigt man für eine eindeutige Lösung eines linearen Gleichungssystems $n + 1$ unabhängige Gleichungen.

Beispiel

Um eine Funktion zweiten Grades $f(x) = a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2$ bestimmen zu können, werden 3 Gleichungen benötigt.

Beispiel Funktionsgleichung aus Informationen bestimmen

Gesucht ist eine Funktion 5. Grades durch den Ursprung mit einem Hochpunkt $H(1|1)$ und einem Sattelpunkt $S(2|-3)$.

$$\text{Gesucht: } g(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$$

6 Informationen:

$$\text{Punkte: } g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = -3,$$

$$\text{Extremum: } g'(1) = 0, g'(2) = 0$$

$$\text{Wendepunkt: } g''(2) = 0$$

Gleichungssystem aufstellen und anschließend lösen führt zu:

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{67}{8}x^5 + 55x^4 - \frac{1.035}{8}x^3 + \frac{505}{4}x^2 - \frac{85}{2}x$$

Grafische Probe zeigt: $g(x)$ besitzt die Eigenschaften.

Aufgabe A3

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der dargestellten Funktionen.

