2. Differentialrechnung

2.7 Parameterfunktionen

H. Wuschke

08. November 2021

Ziele der Sitzung

- Anwendung des gelernten Wissens auf Parameterfunktionen
- Ortskurve von Extrem- oder Wendepunkten bestimmen

A1 Wiederholung Ableitung

Bilden Sie die gewünschten Ableitungen

a) $\frac{d}{dx}\left(3 \cdot x^4 - \frac{1}{12} \cdot x^2 + e^x - 3 \cdot \sin(x)\right)$

b) $\frac{d}{dt}\left(3 \cdot x^4 \cdot t^2 - \frac{1}{12} \cdot x^2 \cdot t + e^x - 3 \cdot \cos(t)\right)$

c) $\frac{d}{da}\left(5 \cdot a^2 \cdot b^3 - 13 \cdot a^3 \cdot b^2 + 8 \cdot a \cdot b - 6 \cdot a\right)$

d) $\frac{d}{db}\left(5 \cdot a^2 \cdot b^3 - 13 \cdot a^3 \cdot b^2 + 8 \cdot a \cdot b - 6 \cdot a\right)$

e) $\frac{d}{dc}\left(e^{3 \cdot x + c} + \sin(7c - 6x)\right)$

f) $\frac{d}{dx}\left(e^{3 \cdot x + c} + \sin(7c - 6x)\right)$

Parameterfunktion

Eine Funktion $f_k(x)$ heißt **Parameterfunktion** mit der Variable x und dem Parameter k. Hierbei ist der Parameter $k \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl. Manchmal heißt dies auch Funktionsschar.

Beispiel

Gegeben ist die Funktionsvorschrift $g_t(x) = t^2 \cdot x^3 - t^4 \cdot x + 6$

$g_2(x) = 2^2 \cdot x^3 - 2^4 \cdot x + 6 = 4x^3 - 16x + 6$

$g_{-5}(x) = (-5)^2 \cdot x^3 - (-5)^4 \cdot x + 6 = 25x^3 - 625x + 6$

$g_0(x) = 0^2 \cdot x^3 - 0^4 \cdot x + 6 = 0 \cdot x^3 - 0 \cdot x + 6 = 6$

$g_1(x) = x^3 - x + 6$ und $g_{-1}(x) = x^3 - x + 6$

$g_t'(x) = 3 \cdot t^2 \cdot x^2 - t^4$

$g_t''(x) = 6 \cdot t^2 \cdot x$

$g_t'''(x) = 6 \cdot t^2$ Jede weitere Ableitung ist natürlich 0.

Bemerkung

Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte sind meist auch in Abhängigkeit vom gegebenen Parameter.

Beispiel

$$f_a(x) = \frac{1}{2}x \cdot (a-x)^2 = \frac{1}{2} \cdot x^3 - a \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x \;;\; a \in \mathbb{R}$$

$f_a(x)$ besitzt offensichtlich (linke Darstellung des Funktionstermes) die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = a$.

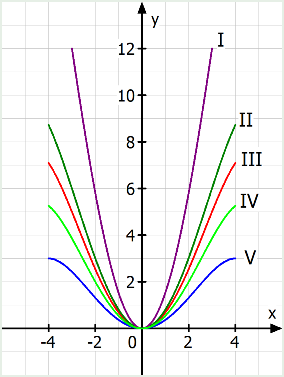
$$f_a'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x + \frac{1}{2} \cdot a^2; \quad f_a''(x) = 3 \cdot x - 2 \cdot a; \quad f_a'''(x) = 3$$

Die Extrempunkte liegen bei $E_1\left(\frac{a}{3} \mid \frac{2 \cdot a^3}{27}\right)$ und $E_2(a|0)$.

Der Wendepunkt liegt bei $W\left(\frac{2 \cdot a}{3} \mid \frac{a^3}{27}\right)$

A2 Abitur 2017 B1 (Teil 1)

Die Abbildung zeigt Längsschnitte von fünf Gläsern einer Glas-Serie; Füße und Stiele der Gläser sind nicht abgebildet. [...] eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit. Die Formen der Gläser sind so gewählt, dass jeder der fünf Längsschnitte modellhaft mithilfe einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit



$$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2 \qquad \text{und } k \in \mathbb{R}^+$$

beschrieben werden kann. Dabei gehört f_2 zum Likörglas der Serie, die Funktion f_3 zum Cocktailglas. Das Sektglas hat eine Höhe von 12 cm, sein Rand einen Durchmesser von 6 cm. Die Materialstärke der Gläser soll vernachlässigt werden.

a) Ordnen Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung zu.

A2 Abitur 2017 B1 (Teil 2)

$$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2 \qquad \text{und } k \in \mathbb{R}^+$$

b) Bestimmen Sie für das Sektglas den zugehörigen Wert von k.

c) Begründen Sie, dass der Graph von f_k für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ symmetrisch zur y-Achse ist.

d) Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von f_k.

Ortskurve

Der Graph einer Funktion, auf dem alle Extrem- bzw. Wendepunkte einer Parameterfunktion liegen, heißt **Ortskurve** der Extrempunkte bzw. **Ortskurve** der Wendepunkte.

Bemerkung

Jeder Extrem- bzw. Wendepunkt besitzt in der Regel eine eigene Ortskurve.

Beispiel

$$f_a(x) = \frac{1}{2}x \cdot (a-x)^2 = \frac{1}{2} \cdot x^3 - a \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x \; ; \; a \in \mathbb{R}$$

$E_1\left(\frac{a}{3} \mid \frac{2 \cdot a^3}{27}\right) \quad \rightarrow \quad x = \frac{a}{3} \Leftrightarrow a = 3 \cdot x \quad \rightarrow \quad y = \frac{2 \cdot (3x)^3}{27} = 2x^3$

$E_2(a|0) \quad \rightarrow \quad x = a$ und $y = 0$

$W\left(\frac{2 \cdot a}{3} \mid \frac{a^3}{27}\right) \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 \cdot a}{3} \Leftrightarrow a = \frac{3x}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^3}{27} = \frac{x^3}{8}$