2. Differentialrechnung

2.6 Krümmungsverhalten und lokale Wendepunkte

H. Wuschke

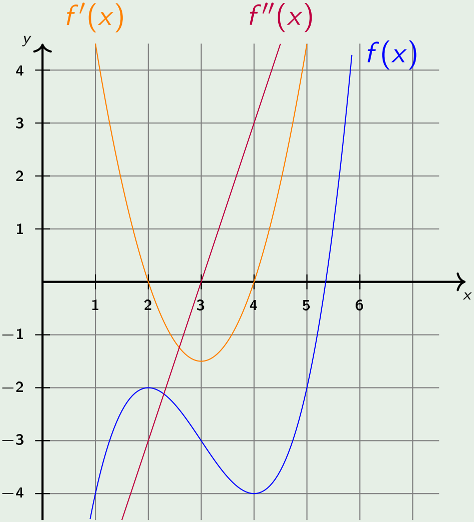
29. September 2019

Ziele der Sitzung

- Wendepunkte berechnen können
- Links- und Rechtskrümmung von Funktionen beschreiben
- Begriffe *konvex* und *konkav* kennen
- Funktionsgleichung, 1. Ableitung, 2. Ableitung und 3. Ableitung korrekt verwenden

Aufgabe A1 ohne CAS

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion und ihren beiden Ableitungen.



Wendepunkt einer Funktion

Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion.
Die Stelle, an der $f'(x)$ einen Extrempunkt besitzt, heißt **Wendestelle** x_W. Setzt man diese Stelle in die Funktionsgleichung ein, erhält man den **Wendepunkt** von $f(x)$. Deshalb gilt:

$$f''(x_W) = 0 \qquad f'''(x_W) \neq 0$$

Eigenschaften der Wendepunktes

- Am Wendepunkt hat $f(x)$ den extremsten Anstieg bzw. das extremste Gefälle.
- Am Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten der Funktion.

Krümmungsverhalten

Wenn $f''(x) < 0$ ist, heißt die Funktion **rechtsgekrümmt** oder **konkav**.

Wenn $f''(x) > 0$ ist, heißt die Funktion **linksgekrümmt** oder **konvex**.

Merkhilfen

- Mersprüche für konvex und konkav:
  konkav, wie ein Schaf *konvex fliegt die Hex'*
- Zur Entscheidung, über konvex/konkav kann man gut Smileys nutzen.

$f''(x) < 0$	$\rightarrow$	☹	$\rightarrow$	konkav
$f''(x) > 0$	$\rightarrow$	☺	$\rightarrow$	konvex

Aufgabe A2 ohne CAS

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12x + 1$

a) Geben Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.

b) Bestimmen den Wendepunkt der Funktion.

c) Beschreiben Sie die Eigenschaft des berechneten Wendepunktes.

d) Geben Sie Stellen an, an welchen $f(x)$ konvex ist und begründen Sie ihre Auswahl.

Aufgabe A3

Bestimmen Sie die Extrempunkte und Wendepunkte der gegebenen Funktionen. Treffen Sie außerdem Aussagen über Monotonie und Krümmungsverhalten der Funktionen.

a) $g(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

b) $h(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$

c) $k(x) = (x-2)^2 \cdot e^{-x^3+2x^2+1}$

Sattelpunkt

Ein **Sattelpunkt** oder lokaler **Terassenpunkt** ist ein besonderer Wendepunkt an der Stelle x_S, mit folgenden Eigenschaften:

$$f'(x_S) = 0 \qquad f''(x_S) = 0 \qquad f'''(x_S) \neq 0$$

Aufgabe A4 ohne CAS

Skizzieren Sie den Graph einer Funktion $b(x)$ mit den gegebenen Eigenschaften.

a) ein Wendepunkt, ein Hochpunkt, ein Tiefpunkt

b) Achsenschnittpunkte $S_y(0|2)$, $S_{x_1}(-2|0)$ und $S_{x_2}(3|0)$, zwei Tiefpunkte, ein Hochpunkt, zwei Wendepunkte

c) zwei Wendepunkte, kein Extrempunkt

d) ein Tiefpunkt, drei Wendepunkte, ein Hochpunkt

e) ein Hochpunkt, zwei Wendepunkte

Heiße Sommerrodelbahn

Das Profil des Schicksalsbergs kann an der zu Gondor gewandten Seite etwa mit der Funktion beschrieben werden:

$$b(x) = -3{,}11 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 2{,}78 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 0{,}0698 \cdot x^2 + 0{,}04 \cdot x + 1287$$

Dabei sind x und y in Meter angegeben. Nachdem Sauron besiegt wurde, wollen die Einwohner von Minas Tirith wieder ein wenig Spaß haben und eine Sommerrodelbahn am Bergeshang errichten. Sie soll im Intervall $0 \leqq x \leqq 320$ verlaufen.

a) Begründen Sie, dass zu Beginn noch ein kleiner Aufstieg vorhanden ist.

b) Bei einem Fall von über 53° ist die Fahrt für Menschen lebensgefährlich. Entscheiden Sie, ob die Testfahrer überleben.

c) Am Ende der Bahn soll eine Schanze $s(x)$ zum Sprung auf den Boden Mordors gebaut werden.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $s(x)$ unter der Bedingung, dass sie knickfrei an $b(x)$ anschließt.

Anschluss an den Funktionsgraphen

Sei $f(x)$ gegeben.
Eine zweite Funktion $g(x)$ soll an der Stelle x_A an $f(x)$ anschließen.

Dafür muss auf jeden Fall gelten:

$$f(x_A) = g(x_A)$$

Damit der Anschluss knickfrei, ohne Knick, tangential, mit gleichem Anstieg ist, muss gelten:

$$f'(x_A) = g'(x_A)$$

Bei Gleisen und Straßen wird für hohe Geschwindigkeiten zusätzlich gefordert, dass:

$$f''(x_A) = g''(x_A)$$