2. Differentialrechnung

2.5 Monotonie und lokale Extrema

H. Wuschke

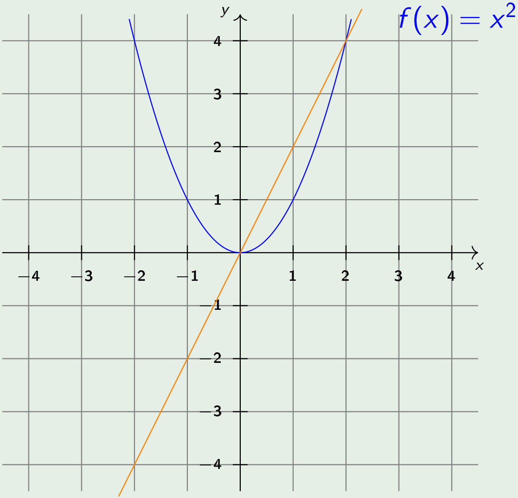
23. September 2021

Ziele der Sitzung

- Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung herstellen
- lokale Extrema berechnen können
- Art des Extremums klassifizieren

Aufgabe A1 ohne CAS

Beschreiben Sie die Monotonie von $f(x) = x^2$ mithilfe der Ableitungsfunktion.



Monotonie einer Funktion

Seien $x_1 < x_2$ zwei beliebige Stellen. Eine Funktion $f(x)$ heißt:

- monoton steigend, falls gilt: $f(x_1) \leqq f(x_2)$
- streng monoton steigend, falls gilt: $f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend, falls gilt: $f(x_1) \geqq f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

Monotoniesatz

Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion. Wenn

- $f'(x) > 0$ ist, dann ist $f(x)$ **streng monoton steigend**.
- $f'(x) < 0$ ist, dann ist $f(x)$ **streng monoton fallend**.

Umkehrung des Monotoniesatzes

Die Umkehrung gilt nicht!   Beispiel: $f(x) = x^3$.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{15}{16}x^5 + \frac{25}{4}x^3$

a) Wählen Sie drei beliebige Stellen aus und beschreiben Sie die Monotonie an diesen Stellen.

b) Begründen Sie, dass $f(x)$ an der Stelle $x = -2$ die Monotonie verändert.

c) Zeigen Sie, dass $f(x)$ an der Stelle $x = 2$ einen Hochpunkt besitzt.

d) Begründen Sie, dass sich die Monotonie von $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht verändert.

Lokales Extremum

Wenn der Graph einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ an der Stelle x_E ein **lokales Extremum** besitzt, dann ist:

$$f'(x_E) = 0 \qquad \text{(notwendige Bedingung)}$$

Hat $f'(x)$ an der Stelle x_E einen Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$, so handelt es sich um einen lokalen **Hochpunkt**/ein lokales **Maximum**.

Hat $f'(x)$ an der Stelle x_E einen Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$, so handelt es sich um einen lokalen **Tiefpunkt**/ein lokales **Minimum**.

Sattelpunkt

Wenn der Graph einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ an der Stelle x_S einen **Sattelpunkt** oder einen lokalen Terassenpunkt besitzt, dann ist $f'(x_S) = 0$ und $f'(x)$ hat dort keinen Vorzeichenwechsel.

Satz von Rolle

Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, Funktion, die differenzierbar auf dem Intervall $(a; b)$ ist und gelte

$$f(a) = f(b)$$

dann gibt es ein $x_0 \in (a; b)$, für welches gilt:

$$f'(x_0) = 0$$

Aufgabe A3

Bestimmen Sie die Koordinaten und Art der Extrempunkte der gegebenen Funktionen:

a) $a(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$

b) $b(x) = 4x^3 - 6x^2 + 9x$

c) $c(x) = x^4$

d) $d(x) = e^x \cdot (x-2)^2$

e) $e(x) = x^4 + x^3$

Aufgabe A3 (Variante 1)

Lösungvariante 1 – mit Vorzeichenwechsel $a(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$

Schritt 1: Ableitung bilden

$a'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$

Schritt 2: 1. Ableitung mit Null gleichsetzen

$0 = \frac{1}{3}x^2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -3$ und $x_2 = 3$

Schritt 3: Vorzeichenwechsel der Ableitung betrachten

$a'(-3,1) \approx 0.2$ und $a'(-2,9) \approx -0,2 \rightarrow$ an der Stelle $x = -3$ liegt ein Hochpunkt vor, da $a(x)$ von monoton steigend in monoton fallend übergeht.

$a'(2,9) \approx -0,2$ und $a'(3,1) \approx 0,2 \rightarrow$ an der Stelle $x = 3$ liegt ein Tiefpunkt vor, da $a(x)$ von monoton fallend in monoton steigend übergeht.

Schritt 4: Koordinaten der Extrema bestimmen

$a(-3) = 6 \rightarrow H(-3|6)$ $a(3) = -6 \rightarrow T(3|-6)$

Globales Extremum

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion.

Falls es einen Punkt $H(x_H|y_H)$ gibt mit $f(x) \leqq y_H$ für alle $x \in D$ gibt, so wird dieser als **globales Maximum** bezeichnet.

Falls es einen Punkt $T(x_T|y_T)$ gibt mit $y_T \leqq f(x)$ für alle $x \in D$ gibt, so wird dieser als **globales Minimum** bezeichnet.

Satz vom Minimum und Maximum

Jede stetige Funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ein Minimum und ein Maximum an.

Randextrema

Bei Funktionen $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ können die globalen Extrema auch an den Rändern a und b sein.

Hinreichendes Kriterium lokaler Extremstellen

Für eine Funktion $f(x)$ und ihre Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ gilt:

Wenn $f'(x_E) = 0$ und gleichzeitig $f''(x_E) < 0$ ist, dann hat der Graph von $f(x)$ an der Stelle x_E ein lokales Maximum.

Wenn $f'(x_E) = 0$ und gleichzeitig $f''(x_E) > 0$ ist, dann hat der Graph von $f(x)$ an der Stelle x_E ein lokales Minimum.

Aufgabe A4

Bearbeiten Sie Aufgabe A3 mithilfe dieses hinreichenden Kriteriums.

Bemerkung zur Bestimmung des Art des Extremums

Der Vorzeichenwechsel der Ableitung funktioniert immer.
Das hinreichende Kriterium mit der zweiten Ableitung funktioniert nicht immer.
Beispiel: $f(x) = x^4$

Aufgabe A4 (Variante 2)

Lösungvariante 2 – mit zweiter Ableitung $a(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$

<u>Schritt 1:</u> Ableitungen bilden

$a'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3 \qquad a''(x) = \frac{2}{3}x$

<u>Schritt 2:</u> 1. Ableitung mit Null gleichsetzen

$0 = \frac{1}{3}x^2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -3$ und $x_2 = 3$

<u>Schritt 3:</u> 2. Ableitung zur Überprüfung nutzen

$a''(-3) = -2 < 0 \rightarrow$ bei $x = -3$ liegt ein Hochpunkt vor

$a''(3) = 2 > 0 \rightarrow$ bei $x = 3$ liegt ein Tiefpunkt vor

<u>Schritt 4:</u> Koordinaten der Extrema bestimmen

$a(-3) = 6 \rightarrow H(-3|6) \qquad a(3) = -6 \rightarrow T(3|-6)$