2. Differentialrechnung

2.4 Tangenten und Normalen

H. Wuschke

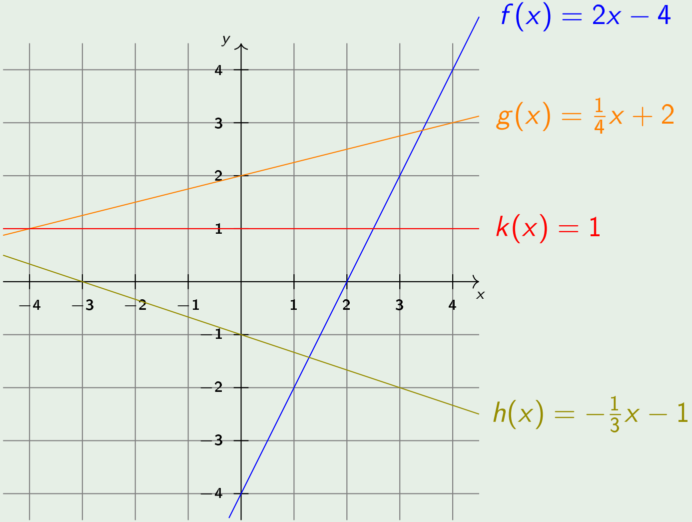
16. September 2021

Ziele der Sitzung

- Wiederholung von linearen Funktionen $y = m \cdot x + n$
- Veränderung des Begriffes *Tangente*
- Aufstellung von verschiedenen Geraden-, Tangenten- oder Normalengleichungen an Funktionen
- Berechnen von Anstiegswinkeln

Aufgabe A1 ohne CAS

Begründen Sie die Gleichungen der gegebenen linearen Funktionen.



lineare Funktion

Eine Funktion $f(x) = m \cdot x + n$ heißt **lineare Funktion**.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ... **Anstieg** der Funktion

$n = f(0)$ ... Verschiebung an der y-Achse.

Bemerkung

Eine lineare Funktion ist eindeutig bestimmt durch:

- Zwei Punkte
- Anstieg und einen Punkt

Passante, Sekante, Tangente

Geraden werden in Abhängigkeit von ihrer Berührung mit anderen Objekten bezeichnet:

Passante (lat. *passare*=vorbeigehen): keine Berührung
Tangente (lat. *tangere*=berühren): 1 Berührungspunkt
Sekante (lat. *secare*=schneiden): schneidet in 2 Punkten

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x-3)^2 - 4$.
Bestimmen Sie die Geradengleichung zwischen den Punkten.

a) $A\,(1|2)$ und $B\,(3|f(3))$ b) $C\,(-2|f(-2))$ und A

c) $D\,(1|f(1))$ und $E\,(7|f(7))$

Anstieg in x_0

Die **Ableitung** an der Stelle x_0 beschreibt den **Anstieg** m_T der Tangente an genau dieser Stelle.

$$f'(x_0) = m_T$$

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 3$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der gegebenen Stelle x_0.

a) $x_0 = 0$ (Anstieg im Ursprung)
b) $x_0 = 2$
c) $x_0 = -3$
d) $x_0 = \frac{1}{2}$

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 3$.
Bestimmen Sie die Stellen, an welchen die Tangente ....

a) ... den Anstieg $m = 1$ hat.
b) ... keinen Anstieg hat.
c) ... parallel zur Geraden $y = -2x + 5$ ist.
d) ... den Anstiegswinkel 45° hat.

Anstiegswinkel

Jede Gerade mit Anstieg m hat einen Anstiegswinkel α. Dabei gilt:

$$m = \tan(\alpha)$$

Für den Anstieg einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 gilt:

$$f'(x_0) = m = \tan(\alpha)$$

Normale

Die Gerade, welche an der Stelle x_0 senkrecht zur Tangente verläuft heißt **Normale**. Für ihren Anstieg m_N gilt:

$$m_N = -\frac{1}{m_T}$$

Aufgabe A5 ohne CAS

Gegeben ist ein Anstieg einer Tangente m_T.
Geben Sie den Anstieg der Normalen an.

a) $m_T = 2$ b) $m_T = \frac{2}{5}$ c) $m_T = -4$ d) $m_T = -0,8$
e) $m_T = 1$ f) $m_T = 1,2$ g) $m_T = -12$ h) $m_T = 0$

Aufgaben A6

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$
Bestimmen Sie, die Gleichung der Tangente und Normale sowie den Anstiegswinkel beider Geraden in x_0.

a) $x_0 = 0$
b) $x_0 = 2$
c) $x_0 = \frac{4}{3}$

Kugelstoß

Der Graph einer abgestoßenen Kugel verläuft auf dem Graphen der folgenden Funktion:

$$k(x) = -0,04x^2 + 0,54x + 1,6$$

Dabei sind x und y in Meter gegeben.

a) Schätzen Sie die Körpergröße der Person ein, unter der Annahme, dass die Kugel auf Schulterhöhe abgestoßen wird.

b) Berechnen Sie, wie weit die Kugel fliegt.

c) Begründen Sie, ob die Kugel nach einer bestimmten Distanz 2,20 m hoch fliegt.

d) Ein idealer Abstoßwinkel ist nach Erfahrungswerten 45°. Beurteilen Sie den Wurf.