2. Differentialrechnung

2.3 Produkt- und Kettenregel

H. Wuschke

15. September 2021

Einstiegsbeispiel 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$.
Dann ist $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

Gegeben ist die Funktion $g(x) = 3x^3 \cdot \sin(x)$.
Dann ist $g'(x) = 9x^2 \cdot \sin(x) + 3x^3 \cdot \cos(x)$

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion und ihrer Ableitung.

Produktregel

Seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei differenzierbare Funktionen. So gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)\cdot v(x)\right) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Kurznotation der Produktregel

$$(u\cdot v)' = u'v + uv'$$

Aufgabe A1

Bilden die erste, zweite und dritte Ableitung der gegebenen Funktionen:

$h(x) = (x^3 - 2x)\cdot e^x$

$k(x) = \sin(x)\cdot\sin(x) = (\sin(x))^2$

Verkettung zweier Funktionen

Seien $f : D_f \to W_f$ und $g : D_g \to W_g$ zwei beliebige Funktionen. So ist die **Verkettung** bzw. Komposition definiert als:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

und

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Dabei ist $g \circ f : D_{f|g} \to W_{g(f)}$ und $f \circ g : D_{g|f} \to W_{f(g)}$

Bemerkung zum Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \ln(x)$ dort ist $D_f = (0; \infty)$ und $W_f = \mathbb{R}$
$g(x) = x^2 - 1$ dort ist $D_g = \mathbb{R}$ und $W_g = [-1; \infty]$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln(x)) = (\ln(x))^2 - 1$
Es gilt: $g \circ f : (0; \infty) \to (-1; \infty)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \ln(x^2 - 1)$
Es gilt: $f \circ g : \mathbb{R} \setminus [-1; 1] \to \mathbb{R}$

Aufgabe A2

Bilden Sie $(g \circ f)(x)$ und $(f \circ g)(x)$ für die gegebenen Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$ und $g(x) = \sqrt{x-2}$

b) $f(x) = e^x$ und $g(x) = 3x^2 - 5x$

Aufgabe A3

Beschreiben Sie die Funktionen, aus denen die Komposition besteht.

a) $f(x) = \sin(3(x-2))$

b) $g(t) = e^{3t-1}$

c) $h(z) = (3z-4)^{43}$

d) $k(x) = e^{\sin(x^2+2)}$

Einstiegsbeispiel 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x^3 - 2x)^5$.
Dann ist $f'(x) = 5 \cdot (x^3 - 2x)^4 \cdot (3x^2 - 2)$

Gegeben ist die Funktion $g(x) = \cos(3x^2 - 4x)$.
Dann ist $g'(x) = (6x - 4) \cdot (-\sin(3x^2 - 4x))$

Gegeben ist die Funktion $h(x) = e^{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$.
Dann ist $h'(x) = (2a \cdot x + b) \cdot e^{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$.

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion und ihrer Ableitung.

Kettenregel

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen. So ist auch die Verkettung der Funktionen $g(f(x))$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(g(f(x))\right) = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

Mündliche Beschreibung der Kettenregel

Besteht eine Funktion aus einer äußeren und einer inneren Funktionen, so gilt für die Ableitung:

(innere Funktion abgeleitet) · (äußere Funktion abgeleitet)

Aufgabe A4

Bilden die erste und zweite Ableitung der gegebenen Funktionen:

$h(x) = (x^4 - 3x^2 + 5)^6$

$k(x) = \sin(e^x)$

Ableitung von $\ln(x)$

Es gilt: $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$

<u>Beweis:</u>

$$e^{\ln(x)} = x$$

Nach Kettenregel ist also die Ableitung

$$(\ln(x))' \cdot e^{\ln(x)} = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Ableitung von a^x

Es gilt: $\frac{d}{dx}(a^x) = \ln(a) \cdot a^x$

<u>Beweis:</u>

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}$$

Nach Kettenregel ist also die Ableitung

$$\ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$$

Quotientenregel

Aus der Ketten- und Produktregel kann man auch die Quotientenregel herleiten. Hier gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$

$u(x) = \sin(x)$ und $u'(x) = \cos(x)$ bzw. $v(x) = x^2$ und $v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x^2 - \sin(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{2\cdot\sin(x)}{x^3}$$