2. Differentialrechnung

2.2 Ableitungsfunktion und Ableitungsregeln

H. Wuschke

09. September 2021

Ziele der Sitzung

- Begriff *Ableitungsfunktion* beschreiben können
- Den Differentialquotienten nutzen, um Ableitungsfunktionen herzuleiten
- Ableitungsregeln üben

lokale Änderungsrate – Differentialquotient – Ableitung – Anstieg in x_0

Der **Differentialquotient** einer Funktion $f(x)$ wird auch als **lokale Änderungsrate** oder **Ableitung** an der Stelle x_0 bezeichnet.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Er gibt den **Anstieg der Tangente** an $f(x)$ in der Stelle x_0 an.

Bemerkung

Die Begriffe Differentialquotient in x_0, lokale Änderungsrate in x_0, Ableitung in x_0 und Anstieg der Tangente in x_0 sind synonym.

Bemerkung Notation des Differentialquotient

Aus der mittleren Änderungsrate

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

wird durch die infinitesimale Annäherung der Differentialquotient.

Um den Unterschied der Differenzen besser beschreiben zu können schreibt man statt Δ ein d. Somit ist die Schreibweise:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Der Nenner gibt dabei an, nach welcher Variable die Funktion abgeleitet wird.

Ableitungsfunktion

Die Funktion $f'(x)$ gibt alle Anstiege der Funktion $f(x)$ an und heißt **Ableitungsfunktion**.

Ableitungsfunktion bestimmen

Gesucht ist die Ableitungsfunktion von $f(x) = 3x^2$.

Mithilfe des Differentialquotienten können die Anstiege an verschiedenen Stellen x_0 gebildet werden.

x_0	-3	-2	-1	0	1	2	3
Anstieg in x_0	-18	-12	-6	0	6	12	18

Vermutung: $f'(x) = 6x$

Aufgabe Ableitungsfunktion

Stellen Sie Vermutungen über die Ableitungsfunktionen der gegebenen Funktionen an:

- $g(x) = x^2$
- $h(x) = x^3$
- $k(x) = x^4$
- $m(x) = 2x^2$
- $n(x) = \frac{1}{3}x^3$
- $p(x) = \frac{1}{8}x^4$

Funktionswerte – Hilfestellung

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
x^3	-27	-8	-1	0	1	8	27

Ableitungensregel Herleitung

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

$$h'(x) = \lim_{k\to 0} \frac{h(x+k) - h(x)}{k} = \cdots = 3x^2$$

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \cdots = 4x^3$$

Ableitungsregel für Potenzfunktionen (Potenzregel)

Für Potenzfunktionen $f(x) = x^p$ gilt:

$$f'(x) = p \cdot x^{p-1}$$

Bemerkung zum Beweis der Potenzregel

Für den Beweis der Potenzregel für natürliche Exponenten wird der Binomische Lehrsatz genutzt. Dieser besagt, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k = x^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \right) + y^n$$

Der Binomialkoeffizient ist folgendermaßen definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \qquad 0! := 1$$

Dann gilt für $f(x) = x^n$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \cdots = n \cdot x^{n-1}$$

Ableitungsbeispiele

$$\frac{d}{dx}\left(4\cdot x^{12}\right)=4\cdot 12\cdot x^{12-1}=48\cdot x^{11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^6}\right)=\frac{d}{dt}\left(1\cdot t^{-6}\right)=1\cdot(-6)\cdot t^{-6-1}=-6\cdot t^{-7}=-\frac{6}{t^7}$$

$$\frac{d}{dr}\left(-\frac{5}{r^7}\right)=\frac{d}{dr}\left(-5\cdot r^{-7}\right)=-5\cdot(-7)\cdot r^{-7-1}=35\cdot r^{-8}=\frac{35}{r^8}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[7]{x^9}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{9}{7}}\right)=\frac{9}{7}\cdot x^{\frac{9}{7}-1}=\frac{9}{7}\cdot x^{\frac{2}{7}}=\frac{9}{7}\cdot\sqrt[7]{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{x^3}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{5}}\right)=\frac{3}{5}\cdot x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}\cdot x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}=\frac{3}{5\cdot\sqrt[5]{x^2}}$$

Ableitungensregel Herleitung

$$m'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot(x+h)^2 - 2\cdot x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4hx + 2h^2 - 2x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 4x + 2h = 4x$$

$$n'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3}(x+h)^3 - \frac{1}{3}x^3}{h} = \cdots = x^2$$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{8}(x+h)^4 - \frac{1}{8}x^4}{h} = \cdots = \frac{1}{2}\cdot x^3$$

Ableitungsregel für Funktionen mit konstantem Faktor (Faktorregel)

Für Potenzfunktionen $f(x) = k\cdot g(x)$ gilt:

$$f'(x) = k\cdot g'(x)$$

Ableitung von konstanten Funktionen

Für eine konstante Funktion $f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Ableitung eines konstanten Summanden (Konstantenregel)

Für konstante Funktionen $f(x) = a$ gilt:

$$f'(x) = 0$$

Beispiele

$\frac{d}{dx} 15 = 0$ $\frac{d}{dx} 3s = 0$ $\frac{d}{dt}(4x - 13) = 0$

Ableitung von Summen von Funktionen

Leiten Sie die folgenden Funktionen mithilfe des CAS ab.
Beschreiben Sie ihre Feststellung.

- $f(x) = x^3 + x^2$
- $g(x) = 2x^2 + 3x$
- $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4$
- $k(x) = 7x^2 - 3x + 15$
- $m(x) = 12x - \frac{\pi}{2}$

Ableitung von addierten Funktionen (Summenregel)

Für eine Funktion $f(x) = g(x) + h(x)$ gilt:

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Herleitung Summenregel

Für $f(x) = g(x) + h(x)$ ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) + h(x+h) - (g(x) + h(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = g'(x) + h'(x)$$

Ableitung spezieller Funktionen

$\frac{d}{dx} e^x = e^x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$ $\qquad$ $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$

Anstiege berechnen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 18,328$.

a) Berechnen Sie den Anstieg an der Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$.

Schritt 1: Funktion ableiten, weil die Ableitungsfunktion ist eine Funktion, welche die Anstiege der Funktion an den entsprechenden Stellen angibt.

$f'(x) = 6x^2 - 8x + 5$

Schritt 2: Die Stellen in die Ableitung einsetzen, um die Anstiege dort zu bestimmen.

$f'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) + 5 = 45$

$\rightarrow$ der Anstieg bei $x_1 = -2$ ist 45.

$f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 5 = 3$

$\rightarrow$ der Anstieg bei $x_2 = 1$ ist 3.

Stellen der Anstiege berechnen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 18,328$.

b) Bestimmen Sie die Stellen, an welchen der Anstieg $m = 3$ ist.

Schritt 1: Funktion ableiten, weil die Ableitungsfunktion ist eine Funktion, welche die Anstiege der Funktion an den entsprechenden Stellen angibt.

$f'(x) = 6x^2 - 8x + 5$

Schritt 2: Den Anstieg mit der Ableitungsfunktion gleich setzen und lösen.

$f'(x) = 3 \Leftrightarrow 6x^2 - 8x + 5 = 3 \quad \overset{\text{Lösen mit CAS}}{\Leftrightarrow} \quad x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = 1$

An den Stellen $x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = 1$ ist der Anstieg 3.

Bedeutung der Anstiege

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 5x^2 - 3$ an der Stelle $x = -4$ monoton fällt und an der Stelle $x = 2$ monoton steigt.

Schritt 1: Funktion ableiten, weil die Ableitungsfunktion ist eine Funktion, welche die Anstiege der Funktion an den entsprechenden Stellen angibt.

$f'(x) = 10x$

Schritt 2: Die Stellen in die Ableitung einsetzen, um die Anstiege dort zu bestimmen.

$f'(-4) = 10 \cdot (-4) = -40 < 0$ also fällt die Funktion monoton an der Stelle $x = -4$.

$f'(2) = 10 \cdot (2) = 20 > 0$ also fällt die Funktion monoton an der Stelle $x = 2$.

Anstiegswinkel berechnen

Bestimmen Sie den Anstiegswinkel der Funktion
$g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ an der Stelle $x = 1$

Schritt 1: Funktion ableiten, weil die Ableitungsfunktion ist eine Funktion, welche die Anstiege der Funktion an den entsprechenden Stellen angibt.

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 7$

Schritt 2: Die Stelle in die Ableitung einsetzen, um den Anstieg dort zu bestimmen.

$f'(1) = 6 \cdot (1)^2 - 10 \cdot 1 + 7 = 3$ also ist 7 der Anstieg an der Stelle $x = 1$.

Schritt 3: Die Formel $m = \tan(\alpha)$ nutzen.

$7 = \tan(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(7) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \approx 81,9^\circ$