2. Differentialrechnung

2.1 Mittlere und lokale Änderungsrate

H. Wuschke

30. August 2021

Ziele der Sitzung

- mittlere Änderungsraten beschreiben und berechnen können
- lokale Änderungsrate beschreiben
- Begriffe *Differenzenquotient*, *Differentialquotient* und *Anstieg* erklären können

A2 Huschke-Äffchen

Die besonders paarungsfreudigen Huschke-Äffchen erweitern seit einigen Jahren ihren Stamm. Mit 6 Jahren ist diese seltene Affenart aus dem Kulturreservat große Friedländer Wiese bereits geschlechtsreif und die Schwangerschaft selbst dauert lediglich 5 Monate. Die Primatologin Ursula von Auwald (von ihren Freunden *Uschi* genannt) hat die Bestände dieser possierlichen Tierchen seit 1990 erfasst:

Jahr	1990	1992	1995	2000	2008	2012	2016	2019
Anzahl	66	80	104	134	168	170	158	137

a) Stellen Sie die Populationsentwicklung grafisch dar.
b) Berechnen Sie das Populationswachstum der einzelnen Zeiträume.
c) Der Friedländer Landbote berichtet: „Die Huschke-Äffchen sind nachweislich seit 2008 höchst bedroht.“ Nehmen Sie dazu Stellung.

Lösung A2b)

Jahr	1990	1992	1995	2000	2008	2012	2016	2019
Anzahl	66	80	104	134	168	170	158	137

b) Der Zuwachs/Nachlass der Äffchen muss ins Verhältnis zu den Jahren gesetzt werden.

[1990;1992]: $\frac{80-66}{1992-1990} = \frac{14}{2} = 7$

[1992;1995]: $\frac{104-80}{1995-1992} = 8$

[1995;2000]: $\frac{134-104}{2000-1995} = 6$

[2000;2008]: $\frac{168-134}{2008-2000} = 4,25$

[2008;2012]: $\frac{170-168}{2012-2008} = \frac{1}{2}$

[2012;2016]: $\frac{158-170}{2016-2012} = -3$

[2016;2019]: $\frac{137-158}{2019-2016} = -7$

Lösung A2c)

Jahr	1990	1992	1995	2000	2008	2012	2016	2019
Anzahl	66	80	104	134	168	170	158	137

c) Im Zeitraum von 2008 bis 2012 lässt sich noch eine leichte Zunahme nachweisen, auch wenn diese nicht sehr stark ist. Danach nimmt die Äffchenpopulation ab, allerdings nicht extrem stärker als sie zugenommen hat, das Wort „höchst“ ist nicht angebracht.

Vgl. $[1990;2008] \approx 5,67$ $[2008;2019] \approx -2,82$

mittlere Änderungsrate – Differenzenquotient

Der **Differenzenquotient** $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ wird auch als **mittlere Änderungsrate** bezeichnet.

Bei einer Funktion $f(x)$ berechnet man dies auch durch $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Bemerkung

Die mittlere Änderungsrate beschreibt eine durchschnittliche Veränderung in verschiedenen Situationen, z.B. das durchschnittliche Wachstum, die Durchschnittsgeschwindigkeit, ...

A3 Anfahrt Transporter

Die Fahrt eines Transporters kann die ersten 20 Sekunden mit folgender Funktion beschrieben werden:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1{,}6263}{2} \cdot t^2, & 0 \leqq t \leqq 17 \\ 27{,}778 \cdot t - 237{,}226, & 17 < t \leqq 20 \end{cases}$$

Dabei wird t in Sekunden angegeben und $s(t)$ in Metern.

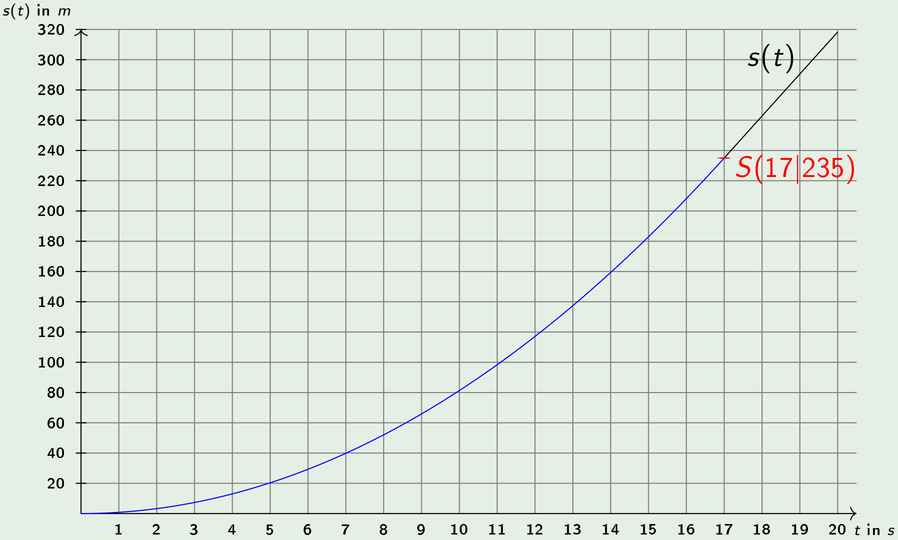
a) Geben sie an, welcher Weg nach 1 s, 5 s, 10 s, 15 s, 17 s und 20 s zurückgelegt wird.

b) Beschreiben Sie die Durchschnittsgeschwindigkeiten in den Intervallen [0;20], [1;20], [5;20], [10;20], [15;20] und [17;20] in $\frac{km}{h}$.

c) Nach 17 s wird eine Momentangeschwindigkeit von ca. 100 $\frac{km}{h}$ erreicht. Anschließend fährt der Transporter konstant 100 $\frac{km}{h}$. Weisen Sie dies nach.

d) Ermitteln Sie die Momentangeschwindigkeit bei 10 s.

A3 Anfahrt Transporter



Lösung A3a)

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1{,}6263}{2} \cdot t^2, & 0 \leqq t \leqq 17 \\ 27,778 \cdot t - 237,226, & 17 < t \leqq 20 \end{cases}$$

$s(1) = \frac{1{,}6263}{2} \cdot 1^2 \approx 0,81 \ m;$

$s(5) = \frac{1{,}6263}{2} \cdot 5^2 \approx 20,33 \ m;$

$s(10) = \frac{1{,}6263}{2} \cdot 10^2 \approx 81,32 \ m;$

$s(15) = \frac{1{,}6263}{2} \cdot 15^2 \approx 182,96 \ m;$

$s(17) = \frac{1{,}6263}{2} \cdot 17^2 = 235 \ m;$

$s(20) = 27,778 \cdot 20 - 237,226 = 318,334 \ m$

Lösung A3b)

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1,6263}{2} \cdot t^2, & 0 \leqq t \leqq 17 \\ 27,778 \cdot t - 237,226, & 17 < t \leqq 20 \end{cases}$$

$s(0) = 0; \quad s(1) \approx 0,81\ m; \quad s(5) \approx 20,33\ m; \quad s(10) \approx 81,32\ m;$

$s(15) \approx 182,96\ m; \quad s(17) = 235\ m; \quad s(20) = 318,334\ m$

$$[0;20] = \frac{318,334-0}{20-0} \approx 15,92\frac{m}{s} \overset{\cdot 3,6}{\approx} 57,3\frac{km}{h}$$

$$[1;20] = \frac{318,334-0,81}{20-1} \approx 16,71\frac{m}{s} \overset{\cdot 3,6}{\approx} 60,2\frac{km}{h}$$

$$[5;20] = \frac{318,334-20,33}{20-5} \approx 19,87\frac{m}{s} \overset{\cdot 3,6}{\approx} 71,5\frac{km}{h}$$

$$[10;20] = \frac{318,334-81,32}{20-10} \approx 23,70\frac{m}{s} \overset{\cdot 3,6}{\approx} 85,3\frac{km}{h}$$

$[15;20] = \ldots \overset{\cdot 3,6}{\approx} 97,5\frac{km}{h} \qquad [17;20] = \ldots \overset{\cdot 3,6}{\approx} 100\frac{km}{h}$

Lösung A3c)

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1{,}6263}{2} \cdot t^2, & 0 \leqq t \leqq 17 \\ 27,778 \cdot t - 237,226, & 17 < t \leqq 20 \end{cases}$$

Es gilt für [17;20] die mittlere Änderungsrate $\frac{318{,}334-235}{20-17} = 27,778$.

Dies ist der Anstieg der linearen Funktion $s(t)$ für $17 < t \leqq 20$.

Bei linearen Funktionen wird der Anstieg m durch den Differenzenquotient gebildet.

Lösung A3d)

$$s(t) = \frac{1,6263}{2} \cdot t^2, 0 \leqq t \leqq 17$$

Für die Momentangeschwindigkeit muss das Intervall möglichst um die 10 herum verkleinert werden.

$[9;10] = \frac{s(10)-s(9)}{10-9} \approx 15,4499\ \frac{m}{s}$

$[9,9;10] = \frac{s(10)-s(9,9)}{10-9,9} \approx 16,1817\ \frac{m}{s}$

$[9,99;10] = \frac{s(10)-s(9,99)}{10-9,99} \approx 16,249\ \frac{m}{s}$

$[9,999;10] = \frac{s(10)-s(9,999)}{10-9,999} \approx 16,2622\ \frac{m}{s}$

$[9,9999;10] = \frac{s(10)-s(9,9999)}{10-9,9999} \approx 16,2629\ \frac{m}{s}$

$$\lim_{x \to 10} \frac{s(10) - s(x)}{10 - x} = \lim_{x \to 10} \frac{s(x) - s(10)}{x - 10} = 16,263\ \frac{m}{s}$$

lokale Änderungsrate – Differentialquotient – Ableitung – Anstieg in x_0

Der **Differentialquotient** einer Funktion $f(x)$ wird auch als **lokale Änderungsrate** oder **Ableitung** an der Stelle x_0 bezeichnet.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Er gibt den **Anstieg der Tangente** an $f(x)$ in der Stelle x_0 an.

Bemerkung

Die Begriffe Differentialquotient in x_0, lokale Änderungsrate in x_0, Ableitung in x_0 und Anstieg der Tangente in x_0 sind synonym.

Die Entdeckung der Ableitung – ein Prioritätsstreit

Sir Isaac Newton (1642/43–1726/27)

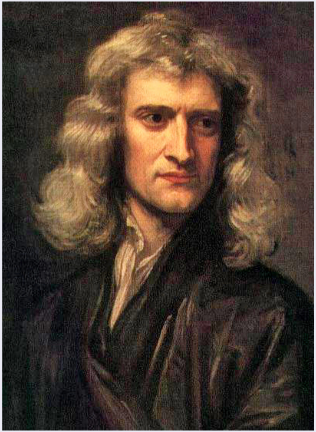


Abbildung: CC0

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Abbildung: CC0