1. Grenzwerte und Stetigkeit

1.3 Grenzwerte von Funktionen

H. Wuschke

18. August 2021

Ziele der Sitzung

- Übertragung der Grenzwertsätze auf Funktionen
- Asymptoten von Funktionen bestimmen
- die Art einer Definitionslücke als *Polstelle*, *(hebbare) Lücke* oder *Sprungstelle* unterscheiden

bestimmter Grenzwert von Funktionen

Sei $f : D \to W; x \mapsto f(x)$ eine beliebige Funktion.
Weiterhin sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = c$$

Dies heißt **bestimmter Grenzwert** der Funktion f an der Stelle x_0.

Beispiel

$f(x) = 3 \cdot x^2 - 5$. Zu bilden ist $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.
Beispielsweise gilt für $(x_n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ ist. Also ist

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(3 \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 - 5\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(12 + \frac{12}{n} + \frac{3}{n^2} - 5\right) = 7$$

Bemerkung

In der Definition ist die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig.
Aus mathematischer Sicht, genügt es also nicht, eine beispielhafte Folge zu nehmen, um den Grenzwert zu bestimmen. Für die Schule ist dies jedoch ausreichend.

unbestimmter Grenzwert von Funktionen

Sei $f : D \to W; x \mapsto f(x)$ eine beliebige Funktion.
Weiterhin sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Dies heißt **unbestimmter Grenzwert** der Funktion f an der Stelle x_0.

Aufgaben A1

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte händisch und überprüfen Sie anschließend mit dem CAS.

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 6x + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} e^{\frac{2x^2+5}{x^4-16}}$

Verhalten im Unendlichen

Seien (x_n) und (y_n) Zahlenfolgen mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$ bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \infty$. Dann bezeichnet man für die Funktion $f : D \to W; x \mapsto f(x)$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

und

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

als **Verhalten im Unendlichen** oder Globalverhalten von f.

Aufgaben A2

Untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen für die gegebenen Funktionen mithilfe des CAS.

$$f(x) = x^3 - 6x + 5$$

$$g(x) = e^{\frac{2x^2+5}{x^4-16}}$$

$$h(x) = -3x^5 + 6x^3 + 2x^2$$

$$j(x) = 7x^2 + 3x - 8.000$$

$$k(x) = \frac{3}{x^2+2}$$

$$m(x) = \frac{-3x^2+7x-80}{5x^2+9}$$

$$n(x) = 1,4^x + 3$$

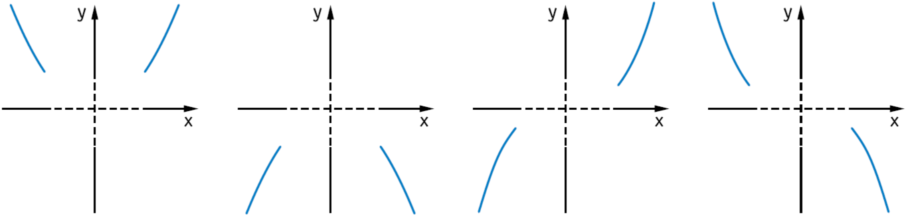
$$p(x) = 0,3^x - 4$$

Verhalten im Unendlichen von Polynomen

Man kann den Globalverlauf einer ganzrationalen Funktion f mit

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

vom Grad n auf einen der folgenden Funktionstypen mit $y = a_n x^n$ zurückführen:



n gerade, $a_n > 0$

$f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

$f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$

n gerade, $a_n < 0$

$f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$

$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$

n ungerade, $a_n > 0$

$f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$

n ungerade, $a_n < 0$

$f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$

$f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$

Abbildung: EdM 11 Sachsen, S. 14.

Notation

Ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ schreibt man auch $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

Beispiele:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + x^2 - x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} (x^4 + x^2 - x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^4 + x^2 - x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + x^2 - x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} (-x^4 + x^2 - x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (-x^4 + x^2 - x) = -\infty$$

Beispiel für Grenzwert an einer Stelle

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to -\frac{2}{45}} g(x) = -\frac{45}{2}$$

$$\lim_{x \to 42} g(x) = \frac{1}{42} \qquad \lim_{x \to -5437} g(x) = -\frac{1}{5437}$$

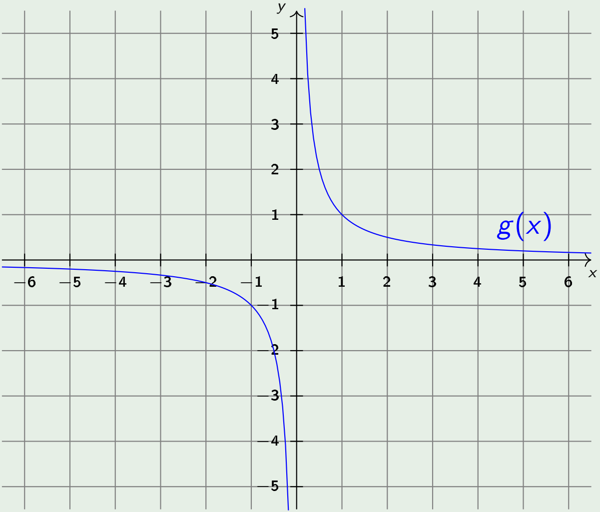
$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

Also ist $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = ???$$

Beispiel für Grenzwert an einer Stelle

$$g(x) = \frac{1}{x}$$



links- und rechtsseitiger Grenzwert

Der **linksseitige Grenzwert** einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 ist der Wert, dem sich die Funktion für alle $x < x_0$ beliebig dicht annähert.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Der **rechtsseitige Grenzwert** einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 ist der Wert, dem sich die Funktion für alle $x > x_0$ beliebig dicht annähert.

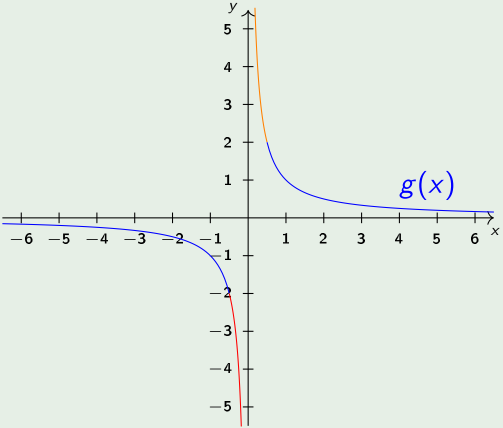
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Wenn $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ so ist dies der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Wenn $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nicht.

Beispiel für Grenzwert an einer Stelle

$$g(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to 0} g(x) \text{ existiert nicht.}$$



$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = \infty$$

Aufgaben A3

Überprüfen Sie, ob die Grenzwerte existieren, indem Sie den links- und den rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle untersuchen.

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-2) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-1)}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-1)}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-2) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-1)}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x-2) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-1)}$

waagerechte Asymptote

Gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$, so hat $f(x)$ eine **waagerechte Asymptote** mit der Gleichung $y = c$

Arten von Definitionslücken

Eine **Definitionslücke** ist eine Stelle x_0, an der $f(x)$ nicht definiert ist.

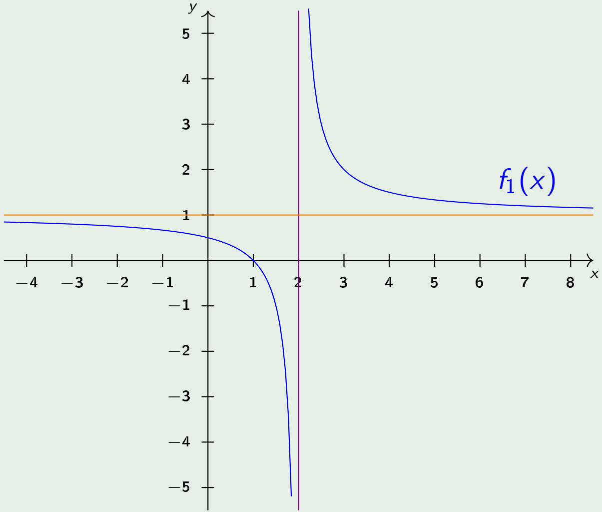
Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$, heißt die Stelle x_0 **(hebbare) Lücke**.

Gilt $\lim\limits_{x\to x_0{}^-} f(x) = c$ und $\lim\limits_{x\to x_0{}^+} f(x) = d$, heißt die Stelle x_0 **Sprungstelle**.

Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, heißt die Stelle x_0 **Polstelle** mit senkrechter Asymptote $x = x_0$.

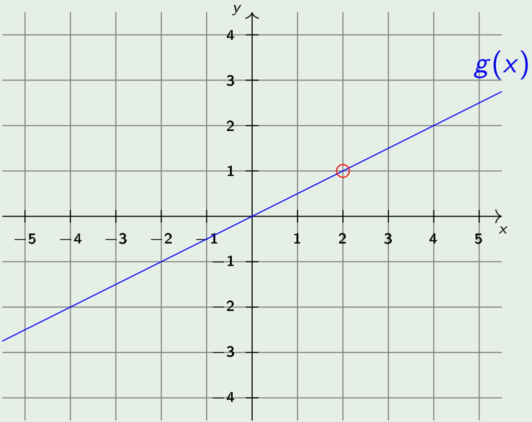
Beispiel für Definitionslücken – Polstelle

$$f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1 \quad \text{Asymptoten bei } x = 2 \text{ und } y = 1$$



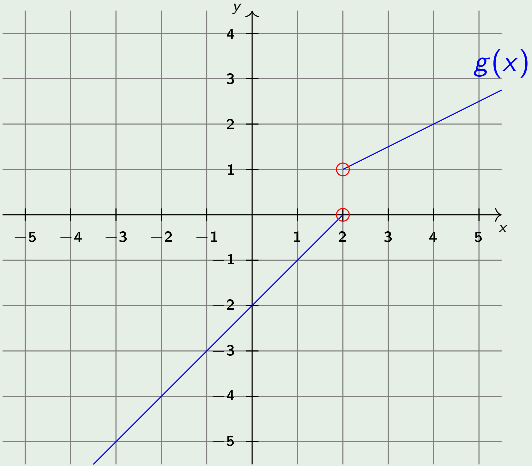
Beispiel für Definitionslücken – (hebbare) Lücke

$$f_2(x) = \frac{0,5x \cdot (x-2)}{(x-2)} \neq 0,5x$$



Beispiel für Definitionslücken – Sprungstelle

$$f_3(x) = \begin{cases} x-2, & x<2 \\ \frac{1}{2}x, & x>2 \end{cases}$$



Aufgabe A4

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{(x-2)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+2)\cdot(x-1)}$ auf Polstellen, (hebbare) Lücken, Nullstellen und Asymptoten. Stellen Sie anschließend den Funktionsgraphen in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

Aufgaben A5

Geben Sie eine Funktion mit folgenden Eigenschaften an:

a) waagerechte Asymptote $y = 7$.

b) Polstelle bei $x_0 = 8$.

c) (hebbare) Lücke an der Stelle $x_0 = 6$.

d) Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

e) Polstelle bei $x_0 = -5$; Lücke bei $x_1 = 0$.

f) Polstellen bei $x_0 = -19$ und $x_1 = 17$, Lücke bei $x_2 = 23$ und waagerechte Asymptote $y = 15$.