Aufgaben zur Übung II (23.09.2020)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (2+4+4+2+5+3 BE) – IQB-Aufgabe 2019

In einem Land, in dem 80 % der Erwachsenen einen Führerschein besitzen, werden 200 Erwachsene zufällig ausgewählt. Es soll angenommen werden, dass dabei die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, binomialverteilt ist.

a) Begründen Sie, dass die beschriebene Annahme gerechtfertigt ist.

Es handelt sich um zwei Ereignisse: Die Person hat einen Führerschein oder nicht. Da es ein gesellschaftlicher Anteil ist, verändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, vom Erwartungswert für diese Anzahl um höchstens 5 % abweicht.

Der Erwartungswert ist $\mu = 0,8 \cdot 200 = 160$. 5% von 160 Personen sind 8 Personen.

$P(160 - 8 \leqq X \leqq 160 + 8) = P(152 \leqq X \leqq 168) \approx 86,77\%$

c) Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen mindestens sein müsste, damit von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als 160 einen Führerschein besitzen.

$P(X > 160) \geqq 0,9$ Lösung durch systematisches Probieren

Für $B_{209;0,8}$ ist $P(X > 160) \approx 0,876$ und für $B_{210;0,8}$ ist $P(X > 160) \approx 0,9003$, also müssen es mindestens 210 Personen sein.

In einer bestimmten Region des betrachteten Lands werden alle Fahrprüfungen eines Jahres auf einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Alter eines Prüflings und dem Bestehen der Prüfung hin untersucht. Von insgesamt 13879 Prüflingen waren 2.482 zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt. Insgesamt haben 11.104 Prüflinge die Prüfung bestanden; davon waren 8.870 zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre.
Ein Prüfling wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: „Der Prüfling war zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt.“
B: „Der Prüfling hat die Prüfung bestanden.“

d) Bestimmen Sie die Anzahl der Prüflinge, die zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre waren und die Prüfung nicht bestanden haben.

	A	$\overline{A}$	gesamt
B	2.234	8.870	11.104
$\overline{B}$	248	2.527	2.775
gesamt	2.482	11.397	13.879

Aus der Vierfeldertafel ist ersichtlich, dass es 2.527 Personen sind.

e) Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P(B)$ übereinstimmen.
Geben Sie an, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Wenn $P_A(B) = P(B)$ gilt, dann sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig.

$P(B) = \frac{11.104}{13.879} \approx 0,80$ $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2.234}{2.482} \approx 0,90$

Also ist $P(B) \neq P_A(B)$ und daher sind die Ereignisse stochastisch abhängig. Das heißt, das Bestehen der Prüfung ist abhängig vom Alter der Personen.

f) Besteht ein Prüfling die Prüfung bei der ersten Teilnahme nicht, nimmt er ein zweites Mal teil. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung schon bei der ersten Teilnahme bestanden haben, ist q. Unter denjenigen, die zum zweiten Mal an der Prüfung teilnahmen, ist der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung bestanden haben, nur halb so groß. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung spätestens bei der zweiten Teilnahme bestanden haben, beträgt 90 %. Berechnen Sie den Wert von q.

$q + (1-q) \cdot \frac{1}{2} \cdot q = 0,9$ ist die Gleichung, die hier beschrieben wird, da zu dem Anteil q das Gegenereignis $(1-q)$ (weil die Person beim ersten Mal nicht bestanden hat) mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2} \cdot q$ multipliziert wird. Wird diese Gleichung im Rechner gelöst, so erhält man: $q_1 \approx 0,8292$ und $q_2 \approx 2,1708$. Dabei entfällt q_2, da dies keine Wahrscheinlichkeit sein kann (muss zwischen 0 und 1 liegen). Also ist $q \approx 82,92\%$.

Aufgabe 2 (2+2+2+2+4+4+4 BE) – IQB grundlegende Aufgabe

Ein Pharmakonzern entwickelt ein Medikament zur Behandlung der Krankheit K. Für die Zusammensetzung des Medikaments kommen zwölf Wirkstoffe infrage. Mit einer Vielzahl möglicher Wirkstoffkombinationen werden Tests durchgeführt.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Wirkstoffkombinationen, die genau sieben der infrage kommenden Wirkstoffe enthalten.

Dies wird mithilfe des Binomialkoeffizienten berechnet mit $n = 12$ und $k = 7$, also $\binom{12}{7} = 792$ Möglichkeiten

b) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Wirkstoffkombinationen, die mindestens sieben der infrage kommenden Wirkstoffe enthalten.

$$\binom{12}{7} + \binom{12}{8} + \binom{12}{9} + \binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12} = \sum_{k=7}^{12} \binom{12}{k} = 1.586 \text{ Möglichkeiten}$$

Nach Abschluss der Entwicklung bringt der Pharmakonzern das neue Medikament auf den Markt. Einer Studie zufolge beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte an K erkrankte Person durch das Medikament geheilt wird, 80 %.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 zufällig ausgewählten an K erkrankten Personen mindestens 80 durch das Medikament geheilt werden.

$B_{100;0,8}$ (Begründung nicht erfordert) X...Anzahl der geheilten Personen

$P(X \geqq 80) \approx 55,95\%$

d) Die Behandlung mit dem Medikament kann zu Nebenwirkungen führen. Im Rahmen einer Untersuchung zur Dauer der Nebenwirkungen wurden Personen, die mit dem Medikament behandelt wurden, dazu befragt, wie lange Nebenwirkungen nach Beendigung der Behandlung andauerten. Die folgende Tabelle fasst das Ergebnis der Befragung zusammen:

Dauer in Monaten	0	1	2	3	4
Anteil der Personen in %	5	15	45	30	5

Eine der befragten Personen wird zufällig ausgewählt; die Zufallsgröße X gibt die zugehörige Dauer der Nebenwirkungen in Monaten an. Berechnen Sie den Erwartungswert von X und beschreiben Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.

$E(X) = 0 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,45 + 3 \cdot 0,30 + 4 \cdot 0,05 = 2,15$

Das heißt, dass die erwarteten Nebenwirkungen ein wenig über 2 Monate andauern können.

Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass in einem Land 0,2 % der Bevölkerung an K erkrankt sind.

e) Ermitteln Sie für dieses Land, wie groß die Anzahl zufällig ausgewählter Personen mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass davon mindestens eine Person an K erkrankt ist, mindestens 90 % beträgt.

Y...Anzahl der Personen, die an K erkrankt ist $P(Y \geqq 1) \geqq 0,9$ Lösung durch systematisches Probieren

Für $B_{1150;0,002}$ ist $P(Y \geqq 1) \approx 0,89997$ und für $B_{1151;0,002}$ ist $P(Y \geqq 1) \approx 0,9002$, also müssen mindestens 1.151 Personen ausgewählt werden.

Zur Erkennung der Krankheit K kann ein Test durchgeführt werden. Ist eine Person an K erkrankt, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Ist eine Person nicht an K erkrankt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis irrtümlich positiv ist, 1 %.

f) Erstellen Sie zum beschriebenen Test für das betrachtete Land eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

98% von 0,002 ist 0,00196 1% von 0,998 ist 0,00998

	K	$\overline{K}$	gesamt
T (positiv)	0,00196	0,00998	0,01194
$\overline{T}$ (negativ)	0,00004	0,98802	0,98806
gesamt	0,002	0,998	1

g) Für eine zufällig ausgewählte Person aus dem betrachteten Land ist das Testergebnis positiv. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich erkrankt ist, etwa 16,4 % beträgt. Begründen Sie, dass es bei einem positiven Testergebnis sinnvoll ist, nicht sofort mit einer Behandlung zu beginnen.

$P_K(T) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}00196}{0{,}01194} \approx 16,42\%$

Da die Person nur zu 16,42% wirklich krank sein könnte, ist es nicht sinnvoll, gleich anzunehmen, dass sie krank ist, nur weil der Test positiv ist. Vielleicht sollte noch ein Test gemacht werden.