Flächenberechnungen II (24.11.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (12 BE) – ohne CAS

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche die Graphen von f und g über dem angegebenen Intervall einschließen.

a) $f(x) = x^3;\qquad g(x) = x;\qquad I = [-2; 5]$

$x^3 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -1; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 1$

$$\int_{-2}^{-1} (x - x^3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{4}{2} - \frac{16}{4}\right) = \frac{1}{4} - (-2) = 2\frac{1}{4} = 2,25$$

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\int_{1}^{5} (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{5} = \frac{625}{4} - \frac{25}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{575}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{576}{4} = 144$$

Gesamtfläche: $2,25$ FE $+ 0,25$ FE $+ 0,25$ FE $+ 144$ FE $= 146,75$ FE

b) $f(x) = x^3 + x;\qquad g(x) = x^2 + 1;\qquad I = [0; 2]$

Diese Aufgabe ist für euch nicht im Kopf lösbar, weil ihr keine Polynomdivision durchführen könnt.

Gesamtfläche: 2,5 FE

c) $f(x) = e^x;\qquad g(x) = x;\qquad I = [0; \ln(2)]$ Die beiden Funktionen haben keine Schnittstellen, da e^x immer oberhalb von $y = x$ liegt. Also ist die Gesamtfläche:

$$\int_{0}^{\ln(2)} (e^x - x)\,dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\ln(2)} = 2 - \frac{(\ln(2))^2}{2} - (1 - 0) = 1 - \frac{(\ln(2))^2}{2}\ \text{FE}$$

Aufgabe 2 (12 BE)

Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche die Graphen von f und g vollständig einschließen.

a)	$f(x) = x^3 - 4x + 3;$	$g(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$
b)	$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 25x + 22;$	$g(x) = \frac{1}{x}$
c)	$f(x) = x^2 - 2;$	$g(x) = \sqrt{x+4}$
d)	$f(x) = 2^x - 3x^2;$	$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a) Zunächst werden die Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$ ermittelt.

(Der Rechenansatz ist $f(x) = g(x)$, es kann aber auch über den Grafik-Modus der TI-Nspire App gemacht werden. Der Ansatz muss lediglich beschrieben werden.)

$x_1 \approx -2,146; \quad x_2 \approx -0,246; \quad x_3 \approx 1,893$

Nun wird die Gesamtfläche berechnet.
Variante 1: Gesamtfläche als Summe aller Teilflächen

$$\int_{-2{,}146}^{-0{,}246} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{-0{,}246}^{1{,}893} (g(x) - f(x))\,dx \approx 8,375\text{FE}$$

Variante 2: Gesamtfläche als Betragsdifferenz zwischen erster und letzter Schnittstelle:

$$\int_{-2{,}146}^{1{,}893} |f(x) - g(x)|\,dx \approx 8,375\text{FE}$$

b) Zunächst werden die Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$ ermittelt.

$x_1 \approx 0,048; \quad x_2 \approx 1,703; \quad x_3 \approx 2,669; \quad x_4 \approx 4,580$

Nun wird die Gesamtfläche berechnet.
Variante 1: Gesamtfläche als Summe aller Teilflächen

$$\int_{0{,}048}^{1{,}703} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{1{,}703}^{2{,}669} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{2{,}669}^{4{,}580} (f(x) - g(x))\,dx \approx 11,89\text{FE}$$

Variante 2: Gesamtfläche als Betragsdifferenz zwischen erster und letzter Schnittstelle:

$$\int_{0{,}048}^{4{,}580} |f(x) - g(x)|\,dx \approx 11,89\text{FE}$$

c) Schnittstellen: $x_1 \approx 1,861, \quad x_2 \approx 2,115$

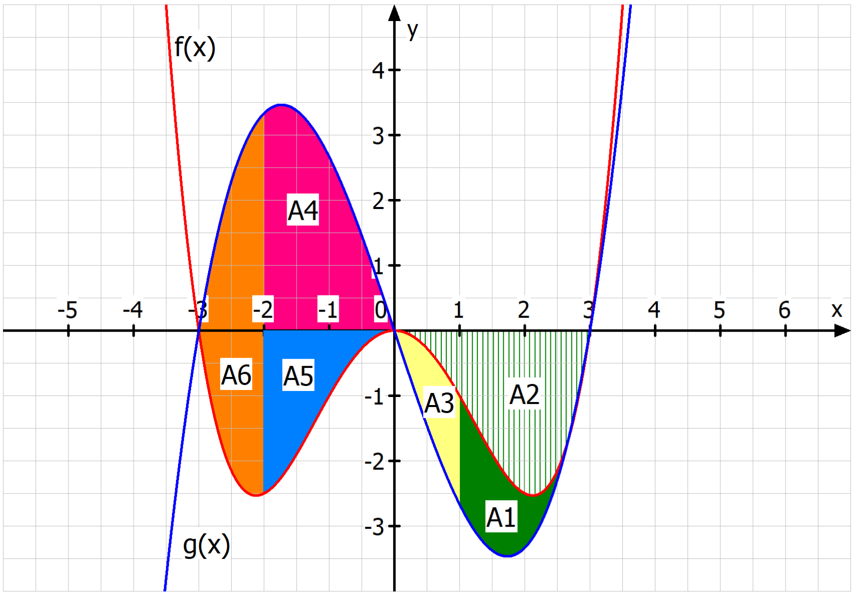
Gesamtfläche: $\displaystyle\int_{-1{,}861}^{2{,}115} (g(x) - f(x)) \approx 10,645\text{FE}$

d) Schnittstellen: $x_1 = 0; \quad x_2 \approx 0,373; \quad x_3 \approx 7,335$

Gesamtfläche: $\displaystyle\int_{0}^{7{,}335} |f(x) - g(x)|\,dx \approx 164,62\text{FE}$

Aufgabe 3 (6 BE)

Beschreiben Sie die Flächen mithilfe der entsprechenden Integrale.

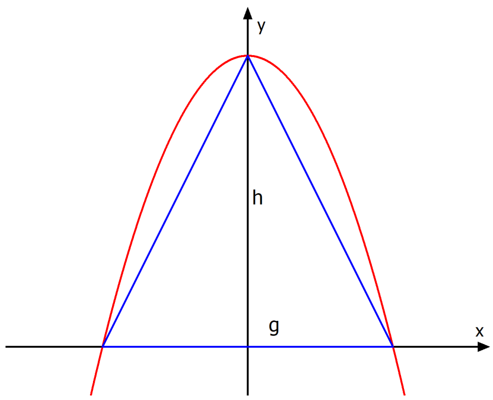


A1: $\int\limits_{1}^{3} (f(x) - g(x))\, dx$ A2: $\left| \int\limits_{0}^{3} f(x)\ dx \right|$ A3: $\int\limits_{0}^{1} (f(x) - g(x))\, dx$

A4: $\int\limits_{-2}^{0} g(x)\ dx$ A5: $\left| \int\limits_{-2}^{0} f(x)\ dx \right|$ A6: $\int\limits_{-3}^{-2} (g(x) - f(x))\, dx$

Knobelaufgabe (3 BE)

Zeigen Sie die nachfolgende Aussage: „Ich sage, dass jedes Parabelsegment zu dem Dreieck, das mit ihm die gleiche Basis und die gleiche Höhe (den gleichen Scheitel) hat, sich wie 4: 3 verhält.“[1]



Das Dreieck hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

Die Parabel ist nach unten geöffnet, hat die Nullstellen $x_1 = -\frac{g}{2}$ und $x_2 = \frac{g}{2}$ und hat die Verschiebung h entlang der y-Achse.
Es muss also nur der Vorfaktor a ermittelt werden: $-a \cdot \left(x + \frac{g}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{g}{2}\right) = -a \cdot x^2 + a \cdot \frac{g^2}{4}$

Da die Parabel durch den Punkt $P(0|h)$ verläuft ist also $-a \cdot 0^2 + a \cdot \frac{g^2}{4} = h$ bzw. $a \cdot \frac{g^2}{4} = h$

Daher ist $a = \frac{4 \cdot h}{g^2}$ Daher ist Gleichung der Parabel:

$$f(x) = -\frac{4 \cdot h}{g^2} \cdot x^2 + h$$

Der Inhalt der Fläche ist:

$$\int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} f(x)\,dx = \left[-\frac{4 \cdot h \cdot x^3}{3 \cdot g^2} + h \cdot x\right]_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} = -\frac{4 \cdot h \cdot g^3}{3 \cdot g^2 \cdot 8} + \frac{h \cdot g}{2} - \left(\frac{4 \cdot h \cdot g^3}{3 \cdot g^2 \cdot 8} - \frac{h \cdot g}{2}\right) = -\frac{1}{3} \cdot g \cdot h + h \cdot g = \frac{2}{3} \cdot g \cdot h$$

Also verhalten sich die Flächen wie $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{6} : \frac{3}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 4 : 3$

[1] Aus einer Abhandlung von Ibrahim b. Sinan b. Thabit (900–946), online unter: `https://www.ngzh.ch/archiv/1918_63/63_1-2/63_9.pdf`, S. 219.
Dieses Problem war bereits Archimedes von Syrakus (287–212 v. Chr.) bekannt, allerdings fehlt mir dazu die Quelle.