Flächenberechnungen I (15.11.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (16 BE) – ohne CAS

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int\limits_3^5 -2 \; dx = [-2x]_3^5 = -2 \cdot 5 - (-2 \cdot 3) = -4$

b) $\int\limits_2^5 6x \; dx = \left[3x^2\right]_2^5 = 3 \cdot 5^2 - (3 \cdot 2^2) = 63$

c) $\int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi} 2\sin(x) \; dx = 2 \cdot [-\cos(x)]_0^{\frac{3}{2}\pi} = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \cos(0)\right) = -2$

d) $\int\limits_0^6 (2x-1) \; dx = \left[x^2 - x\right]_0^6 = 6^2 - 6 - (0^2 - 0) = 30$

e) $\int\limits_1^2 (\frac{1}{2}t^3 + t) \; dt = \left[\frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t^2\right]_1^2 = \frac{1}{8} \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot 4 - (\frac{1}{8} + \frac{1}{2}) = 4 - \frac{5}{8} = \frac{27}{8}$

f) $\int\limits_{-2}^{-1} \left(\frac{3}{a^2} + a^2 + 1\right) \; da = \left[-\frac{3}{a} + \frac{1}{3}a^3 + a\right]_{-2}^{-1} = \frac{3}{2} - \frac{8}{3} - 2 - (3 - \frac{1}{3} - 1) = \frac{3}{2} - \frac{7}{3} - 4 = -\frac{29}{6}$

g) $\int\limits_1^2 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \; dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x\right]_1^2 = 4 - 8 + 6 - 2 - (\frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{2} - 1) = \frac{1}{4}$

h) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} -\cos(x) \; dx = [-\sin(x)]_{-\pi}^{\pi} = -\sin(\pi) - (-\sin(-\pi)) = 0$

Aufgabe 2 (12 BE) – ohne CAS

Geben Sie den Wert der bestimmten Integrale in Abhängigkeit der Parameter an.

a) $\int\limits_0^k (ab^2) \; dx = \left[ab^2x\right]_0^k = ab^2k - (ab^2 \cdot 0) = ab^2k$

b) $\int\limits_0^k (ab^2) \; da = \left[\frac{1}{2}a^2b^2\right]_0^k = \frac{1}{2}k^2b^2$

c) $\int\limits_0^k (ab^2) \; db = \left[\frac{1}{3}ab^3\right]_0^k = \frac{1}{3}ak^3$

d) $\int\limits_1^k (12a^2b^3x) \; dx = \left[6a^2b^3x^2\right]_1^k = 6a^2b^3k^2 - 6a^2b^3$

e) $\int\limits_1^k (12a^2b^3x) \; da = \left[4a^3b^3x\right]_1^k = 4k^3b^3x - 4b^3x$

f) $\int\limits_1^k (12a^2b^3x) \; db = \left[3a^2b^4x\right]_1^k = 3a^2b^4x - 3a^2x$

Aufgabe 3 (12 BE) – ohne CAS

Bestimmen Sie den Parameter $k \in \mathbb{R}$, für welchen die Gleichung erfüllt ist.

a) $\int\limits_0^k \frac{1}{3}x\ dx = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{6}x^2\right]_0^k = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}k^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = -6 \qquad k_2 = 6$

b) $\int\limits_1^2 (kx+1)\ dx = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{2}kx^2 + x\right]_1^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2k + 2 - (\frac{1}{2}k + 1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2$

c) $\int\limits_0^2 (3x^2 + k)\ dx = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left[x^3 + kx\right]_0^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 8 + 2k = 4 \quad \Leftrightarrow \quad k = -2$

d*) $\int\limits_1^2 (x^2+1)\ dx = \int\limits_1^2 kx^2\ dx \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_1^2 ((1-k)x^2 + 1)\ dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1-k}{3}x^3 + x\right]_1^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{8-8k}{3} + 2 - (\frac{1-k}{3} + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7-7k}{3} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -7k = -10 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{10}{7}$

Aufgabe 4 (12 BE)

Geben Sie den Wert der folgenden bestimmten Integrale **mit** Hilfsmitteln an.

a) $\int\limits_{-2}^{1} (5x^4 - \frac{1}{5}x^2 - 3)\ dx = \frac{117}{5}$

b) $\int\limits_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = 1$

c) $\int\limits_1^4 (\sqrt{x} + x)\ dx = \frac{73}{6}$

d) $\int\limits_1^4 5\sqrt[4]{x}\ dx = 16 \cdot \sqrt{2} - 4 \approx 18,63$

e) $\int\limits_0^2 \mathrm{e}^v\ dv = \mathrm{e}^2 - 1 \approx 6,39$

f) $\int\limits_{-1}^{2} \mathrm{e}^{-2x}\ dx = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-4}}{2} \approx 3,69$

g) $\int\limits_2^4 \frac{-2}{3x\sqrt[3]{x^2}}\ dx \approx -0,23$

h) $\int\limits_1^3 (x+2)^3\ dx = 136$

Aufgabe 5 (9 BE)

Berechnen Sie den vollständig begrenzten Flächeninhalt zwischen der x-Achse und der gegebenen Funktion $f(x)$.

a) $f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+2)$

Nullstellen offensichtlich bei: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -2$, dabei ist die Fläche zwischen der zweiten und dritten Nullstelle negativ (siehe Funktionsgraph)

$$\int_{-2}^{0} f(x)\ dx + \left| \int_{0}^{1} f(x)\ dx \right| = \frac{37}{12}\text{ FE} \approx 3,08\text{ FE}$$

b) $f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 6x$

$f(x) = 0 \quad \to \quad x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1,5$

$$\int_{0}^{1} f(x)\ dx + \left| \int_{1}^{1,5} f(x)\ dx \right| \approx 0,77\text{ FE}$$

c) $f(x) = -x^2 + 4$

Die Nullstellen sind offensichtlich $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Es ist also nur eine Fläche oberhalb der x-Achse: $\int_{-2}^{2} f(x)\ dx = \frac{32}{3}\text{ FE} \approx 10,67\text{ FE}$

Aufgabe 6 (8 BE) – ohne CAS

Bestimmen Sie die gesuchten Integralfunktionen mithilfe der Definition für $f(x) = 3x + \frac{5}{2}$.

a) $I_3(x) = \int_{3}^{x} \left(3t + \frac{5}{2}\right) dt = \left[\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t\right]_3^x = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \left(\frac{3}{2} \cdot 9 + \frac{5}{2} \cdot 3\right) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 21$

b) $I_{-2}(x) = \int_{-2}^{x} \left(3t + \frac{5}{2}\right) dt = \left[\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t\right]_{-2}^x = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \left(\frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{5}{2} \cdot (-2)\right) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1$

c) $I_{15}(x) = \int_{15}^{x} \left(3t + \frac{5}{2}\right) dt = \left[\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t\right]_{15}^x = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \left(\frac{3}{2} \cdot 225 + \frac{5}{2} \cdot 15\right) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 375$

d) $I_{40}(x) = \int_{40}^{x} \left(3t + \frac{5}{2}\right) dt = \left[\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t\right]_{40}^x = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \left(\frac{3}{2} \cdot 1600 + \frac{5}{2} \cdot 40\right) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2500$