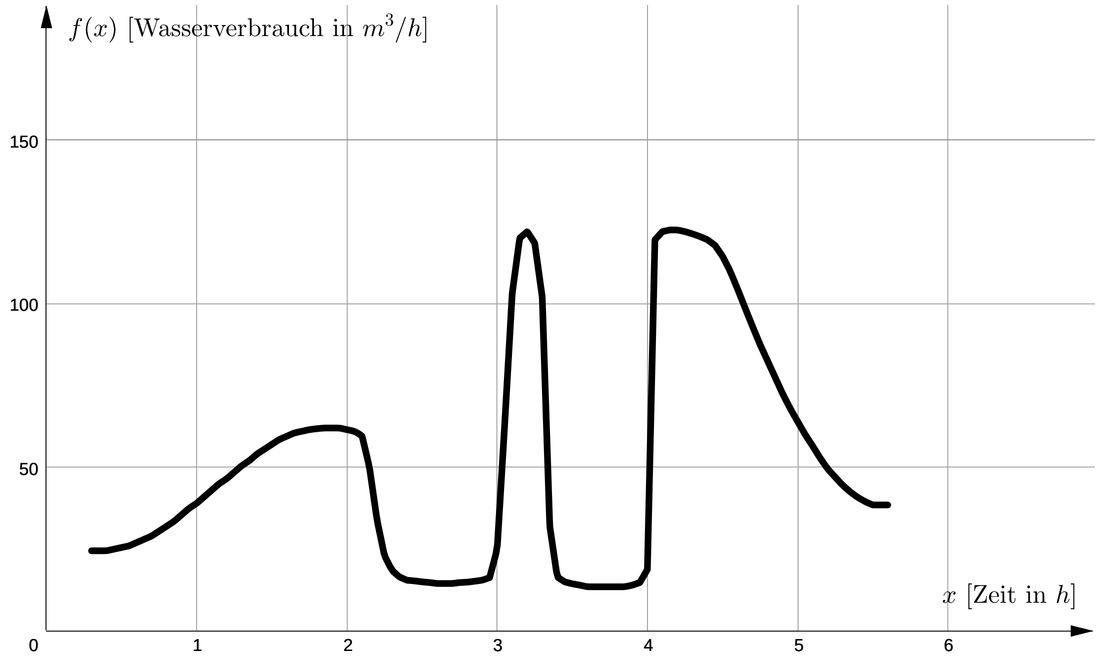
Bestand und Änderung (07.11.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (2 + 3 + 1 + 2 BE)

Wasserverbrauch während eines Fußballspieles

Ob man es glaubt oder nicht, Großereignisse wie die Campions-League haben auch auf die Wasserwerke einer Stadt großen Einfluss. Sie müssen sich intensiv darauf vorbereiten. Hier sehen Sie die Messwerte des Wasserverbrauchs bei einem Spiel der letzten Saison ab 18:00 Uhr:



Im Folgenden soll untersucht werden, worin die besondere Herausforderung für die Wasserwerke besteht.

a) Geben Sie anhand der Grafik folgende Zeitpunkte an: Spielbeginn, Beginn der Halbzeitpause, Ende der Halbzeitpause, Spielende.

Spielbeginn: ca. 20:15 Uhr (Wasserverbrauch geht zurück)
Beginn der Halbzeitpause: ca. 21:00 Uhr (Wasserverbrauch steigt enorm an)
Ende der Halbzeitpause: ca. 21:15 Uhr (Wasserverbrauch geht enorm zurück)
Spielende: ca. 22:00 Uhr (Wasserverbrauch steigt enorm an)

b) Beschreiben Sie den Verlauf des Funktionsgraphen im Sachzusammenhang. Erläutern Sie anschließend, worin die besondere Herausforderung für Wasserwerke besteht.

Während der Spielzeiten, also in der ersten Dreiviertelstunde und in der zweiten Dreiviertelstunde ist der Wasserverbrauch nicht so hoch (ca. 20 $\frac{m^3}{h}$). Aber während der Halbzeitpause und am Ende des Spiels ist der Verbrauch dafür sehr plötzlich, sehr hoch. Darin besteht die Herausforderung, der Wasserwerke, diesen überdurchschnittlichen Verbrauch kompensieren zu können.

Nun soll die Menge des Wassers bestimmt werden, das während der Spielzeit und während der Halbzeitpause verbraucht wurde.

c) Geben Sie zunächst anhand der Graphik eine Schätzung für den Wasserverbrauch an.

Während der Spielzeit: ca. $20\ \frac{m^3}{h} \cdot 1,5h = 30$ m^3
Während der Halbzeitpause: ca. $125\ \frac{m^3}{h} \cdot 0,25h = 31,25$ m^3

d) Nutzen Sie nun die verlinkte GeoGebra-Datei, um Ihre Schätzungen zu überprüfen. Beschreiben Sie, wie Sie dabei vorgehen.

`https://www.geogebra.org/m/vjavgd5k`

Intervallgrenzen festlegen → Zerlegung verfeinern → Möglichkeit der Trapezsumme

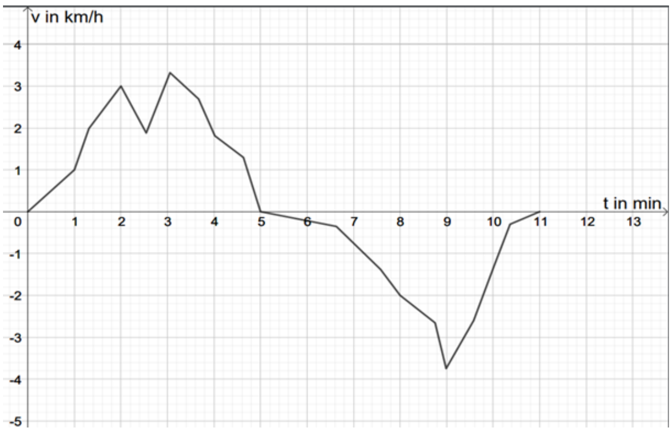
Die Intervallgrenzen müssen individuell begründet werden. In dieser Lösung wird zum Beispiel der Verbrauch ermittelt, der maximal zwischen den beiden Spielzeiten ist und damit nicht exakt zwischen 3 und 3,25 liegt, sondern ein wenig darüber hinaus geht. Dafür werden die Spielzeiten exakt gelöst.
Es wird der Verbrauch während der Halbzeitpause von ca. $a = 2,98$ bis ca. $b = 3,38$ betrachtet. Anschließend können die Ober- und Untersummen immer mehr verfeinert werden. So ergibt sich eine Obersumme von 34,34 m^3 und eine Untersumme von 33,94 m^3. Mit der Trapezsumme in der GeoGebra-Datei kommt man sogar auf den Wert des Integrals: 34,14 m^3.
Das Vorgehen für die Spielzeit ist analog. Hier wird möglicherweise $a = 2,25$ und $b = 3$ für die erste Spielzeit mit einem Verbrauch von 12,03 m^3 mithilfe der Obersumme und 11,95 m^3 mithilfe der Untersumme sowie 11,99 m^3 mithilfe der Trapezsumme oder des Integrals bestimmt. Also etwa 12 m^3 in der ersten Spielzeit. Für die zweite Spielzeit ist $a = 3,25$ und $b = 4$. Die Obersumme ist 18,82 m^3, die Untersumme 18,41 m^3 und die Trapezsumme bzw. das Integral ergeben 18,62 m^3. Die Werte sind deshalb höher als in der ersten Spielzeit, weil scheinbar einige Personen in der Sachsituation nicht wieder pünktlich zurück von der Toilette sind. Insgesamt ergibt sich also während der Spielzeit ein Verbrauch von ca. 30,61 m^3.

Aufgabe 2 (2 + 1 + 2 + 4 + 3 BE)

Der Heißluftballon

Heißluftballone bewegen sich allein mit dem Wind. Dieser bestimmt die Weite und die Richtung, die der Ballon fliegt. Das Einzige, was der Pilot machen kann, ist die Höhe zu ändern. Das tut er, um die unterschiedlichen Windrichtungen in den verschiedenen Höhenlagen auszunutzen.

Durch folgenden Graphen wurde die vertikale Geschwindigkeit aufgezeichnet, die ein solcher Ballon bei der letzten Balloon Fiesta 2015 in Halle/Saale zurückgelegt hat. Die Ballone starten dabei auf der Galopprennbahn Halle/Saale, die bei 17,5 m ü. NN liegt.



a) Beschreiben Sie den Flugverlauf des Ballons.

Im Intervall von 0 bis 5 Minuten steigt der Ballon streng monoton nach oben. Im Anschluss sinkt der 6 Minuten lang und beendet den Flug nach 11 Minuten.

b) Markieren Sie die Stellen, an denen der Ballon die Höhe nicht ändert.

$t_1 = 0$ min $\quad t_2 = 5$ min $\quad t_3 = 11$ min

c) Geben Sie die höchste Anstiegsgeschwindigkeit und die höchste Sinkgeschwindigkeit des Ballons an.

Höchste Anstiegsgeschwindigkeit: $v_{\text{Anstieg}} = 3,2\frac{\text{km}}{\text{h}}$
Höchste Sinkgeschwindigkeit: $v_{\text{sinken}} = 3,8\frac{\text{km}}{\text{h}}$

d) Bestimmen Sie die maximale Flughöhe. (*Tipp: Zählen Sie die Kästchen dazu aus oder bestimmen Sie die Flächen der einzelnen Dreiecke/Trapeze.*)

Ein großes Kästchen entspricht einem Weg von etwa 16,67 Höhenmetern $\left(1\frac{\text{km}}{\text{h}} = 16,67\frac{\text{m}}{\text{min}}\right)$
Der Graph im Intervall von 0 bis 5 Minuten umschließt ca. 9 Kästchen. Die maximale Flughöhe bevor der Ballon wieder sinkt ist somit: $9\text{min} \cdot 16,67\frac{\text{m}}{\text{min}} = 150,03$ m.
Die Flughöhe ü. NN ist also etwa 150 m $+17,5$ m $= 167,5$ m.

e) Ermitteln Sie, auf welcher Höhe der Ballon schließlich landet.

Im Intervall von 5 bis 11 Minuten umschließt der Graph ca. 7,5 Kästchen. Der Ballon sinkt also um $7,5\text{min} \cdot 16,67\frac{\text{m}}{\text{min}} = 125,03$ m.
Insgesamt ist die Höhenbilanz des Ballons somit 25 m und er landet bei einer Höhe von 42,5 m ü. NN.

Aufgabe 3 (8 BE)

Notieren Sie jeweils das dargestellte Integral. Entscheiden Sie außerdem, ob das Integral positiv, negativ oder gleich 0 ist.

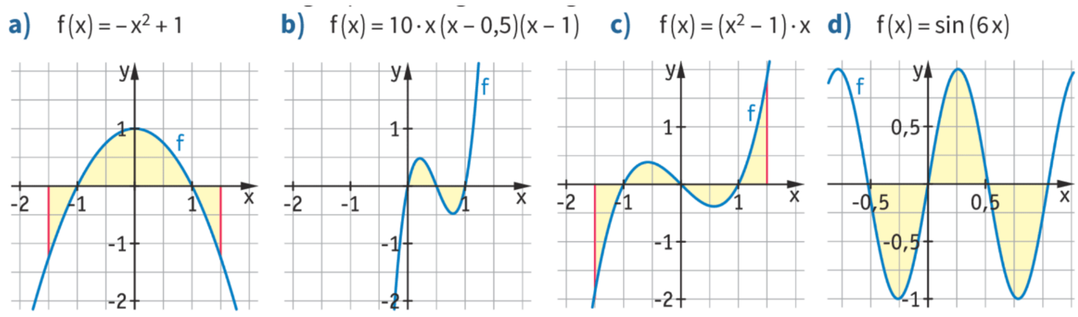


Abbildung 1: EdM Sachsen 12, S. 25.

a) $\int\limits_{-1,5}^{1,5} f(x)\ dx > 0$, weil die Fläche zwischen -1 und 1 größer ist als die beiden Teilflächen zwischen $-1,5$ und -1 sowie 1 und 1,5 zusammen.

b) $\int\limits_{0}^{1} f(x)\ dx = 0$, weil die beiden Flächen sich wahrscheinlich ausgleichen.

c) $\int\limits_{-1,5}^{1,5} f(x)\ dx = 0$, weil die erste Fläche entgegengesetzt zur vierten Fläche ist und diese sozusagen ausgleicht und ähnlich ist es mit der zweiten und dritten Fläche.

d) $\int\limits_{-0,55}^{1,05} f(x)\ dx < 0$, weil sich die erste und zweite Fläche ausgleichen, die dritte Fläche dann jedoch negativ ist.

Aufgabe 4 (4 + 12 BE)

Der abgebildete Graph beschreibt die Änderungsrate einer Größe über einem Intervall.

a) Geben Sie jeweils das Integral von -1 bis 1 an.

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ (2) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ (3) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ (4) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$

b) Bestimmen Sie jeweils den Flächeninhalt der gefärbten Fläche und das zugehörige Integral.

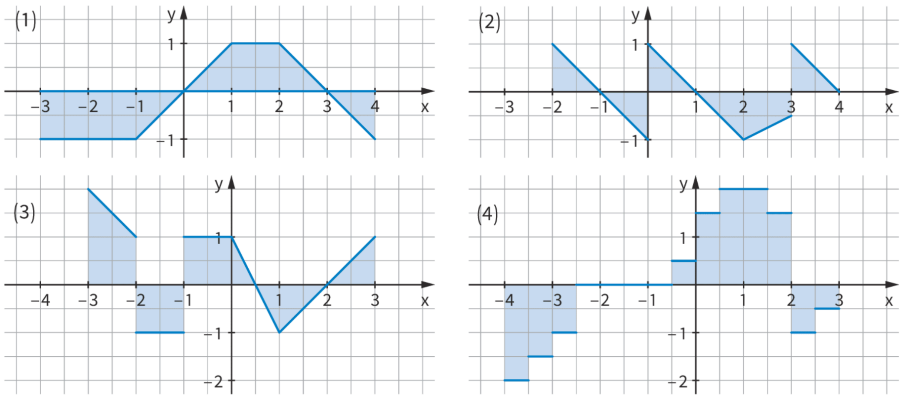


Abbildung 2: EdM Sachsen 12, S. 25.

(1) Die drei Flächen haben einen Flächeninhalt von: 2,5 FE + 2 FE + 0,5 FE = 4 FE.

$$\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = -2,5 + 2 - 0,5 = -1.$$

(2) Die fünf Flächen haben einen Flächeninhalt von:
0,5 FE + 0,5 FE + 0,5 FE + 1,25 FE + 0,5 FE = 3,25 FE.

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = 0,5 - 0,5 + 0,5 - 1,25 + 0,5 = -0,25.$$

(3) Die fünf Flächen haben einen Flächeninhalt von:
1,5 FE + 1 FE + 1,25 FE + 0,75 FE + 0,5 FE = 5 FE.

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 1,5 - 1 + 1,25 - 0,75 + 0,5 = 1,5.$$

(4) Die drei Flächen haben einen Flächeninhalt von: 2,25 FE + 3,75 FE + 0,75 FE = 6,75 FE.

$$\int_{-4}^{3} f(x)\,dx = -2,25 + 3,75 - 0,75 = 0,75.$$

Aufgabe 5 (4 + 1 + 4 + 6 BE)

Der Graph der Funktion f über dem Intervall [-3;4] hat folgenden Verlauf:

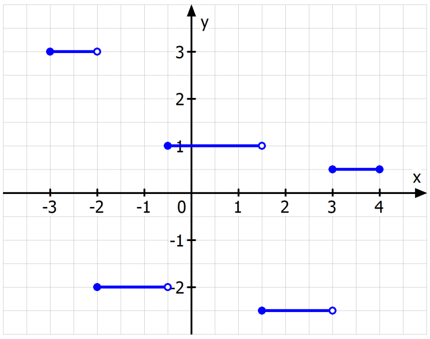


Abbildung 3: H. Wuschke, MatheGrafix 11, 2020

a) Berechnen Sie $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = -2\cdot 1,5 + 1\cdot 1,5 = -1,5$,

$\int_{1}^{4} f(x)\,dx = 1\cdot 0,5 + (-2,5)\cdot 1,5 + 0,5\cdot 1 = -2,75$,

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = -2\cdot 1,5 + 1\cdot 2 + (-2,5)\cdot 0,5 = -2,25$ sowie

$\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = 3\cdot 1 + (-2)\cdot 1,5 + 1\cdot 2 + (-2,5)\cdot 1,5 + 0,5\cdot 1 = -1,25$

b) Geben Sie ein Teilintervall $[a;b]$ von $[-3;4]$ an, sodass $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 0$ ist.

Hier gibt es unendlich viele Lösungen. Mögliche Intervalle wären (nur eins davon angeben): $[-3;-0,5]$ oder $[-1,5;1,5]$ oder $[-0,5;2,3]$.

c*) Berechnen Sie die Werte von a und b für die gilt: $\int_{a}^{4} f(x)\,dx = 1$ bzw. $\int_{-3}^{b} f(x)\,dx = 1$

Hier muss man umgekehrt denken. Fangen wir mit dem zweiten Integral an, da dies leichter ist.

Wir beginnen bei -3, hier ist $f(-3) = 3$, also benötigt man nur einen Balken der Breite $\frac{1}{3}$, um einen Flächeninhalt von 1 zu haben. $\rightarrow \int_{-3}^{-\frac{8}{3}} f(x)\,dx = 1$

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, da $\int_{-3}^{-0.5} f(x)\,dx = 0$ ist und danach wieder ein positiver Flächeninhalt kommt mit $f(-0,5) = 1$, also muss der Balken der dann noch hinzugenommen wird eine Breite von 1 haben. $\rightarrow \int_{-3}^{0,5} f(x)\,dx = 1$

Bei dem ersten Integral wird herauskommen, dass es kein a gibt, dies liegt daran, dass $\int\limits_{3}^{4} f(x)\ dx = 0,5$ ist. Davor ist das Integral $\int\limits_{1,5}^{3} f(x)\ dx = -3,75$ also ist $\int\limits_{1,5}^{4} f(x)\ dx = -3,25$. Die Fläche davor ist hat nur einen positiven Flächeninhalt von 2, also $\int\limits_{-0,5}^{1,5} f(x)\ dx = 2$. Daher ist das Integral $\int\limits_{-0,5}^{4} f(x)\ dx = -1,25$ immernoch negativ. Davor kommt wieder eine negative Fläche, die sich mit der ersten positiven Fläche ausgleicht. Es ist also nicht möglich, ein a zu finden, so dass die Bedingung erfüllt ist.

d) Stellen Sie die Integralfunktionen $I_{-3}(x), I_{-2}(x), I_0(x), I_1(x), I_3(x)$ und $I_4(x)$ in einem Koordinatensystem graphisch dar. Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

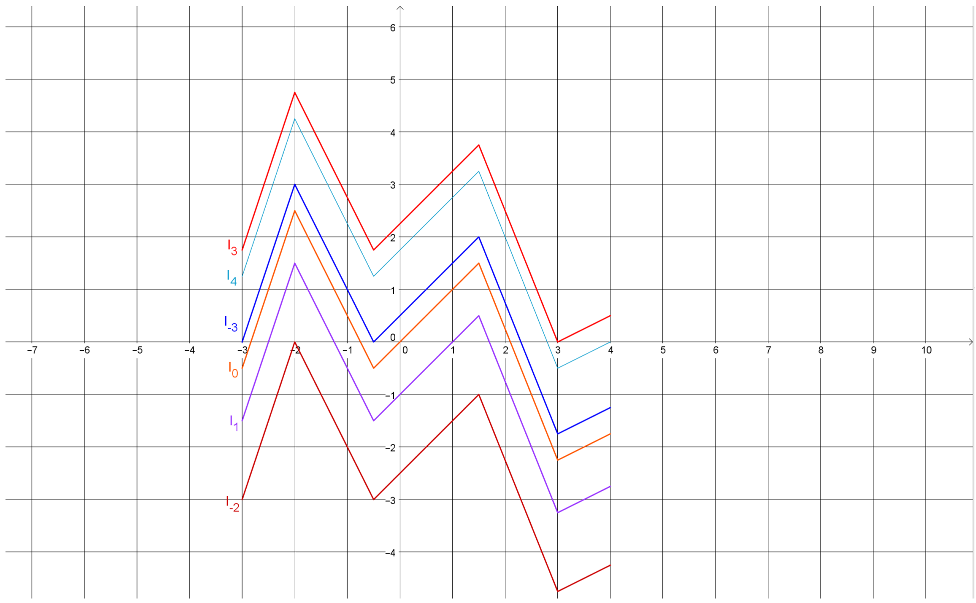


Abbildung 4: H. Wuschke, GeoGebra 5.0, 2020

Beim Zeichnen der entsprechenden Integralfunktion setzt man am besten bei der Stelle an, an der gilt: $F(a) = 0$, wie es in der Definition gefordert ist. Dann geht man die entsprechenden Anstiege nach oben oder unten.

Die Integralfunktionen verdeutlichen gut, dass sie alle die gleichen Steigungen an den entsprechenden Stellen haben, nur eben um gewisse Einheiten verschoben sind. Das ist die reelle Konstante $+c$, welche bei der Menge aller Stammfunktionen immer hingeschrieben werden muss. Diese verschiebt die Funktionsgraphen in positive (nach oben) oder negative (nach unten) Richtung der y-Achse.