Aufgaben zur Binomialverteilung (10.06.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

2014 brach die Ebolafieber-Epidemie in den westafrikanischen Ländern (Guinea, Liberia, Sierra Leone, Nigeria, Senegal und Mali) aus. Dabei hat die Untersuchung und Dokumentation des klinischen Verlaufs ergeben, dass nach Ausbruch der Epidemie 70,8% der Betroffenen gestorben sind.[1]

a) Begründen Sie, warum dies 2014 als binomialverteiltes Zufallsexperiment mit Zufallsgröße X: *Anzahl der infizierten Personen, die an Ebola sterben*, betrachtet werden konnte. (2 BE)

   Es gibt nur zwei Ergebnisse: Die Person stirbt an Ebola und die Person stirbt nicht an Ebola. Außerdem verändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht, da es noch kein Heilmittel zu dem Zeitpunkt gab und daher die Krankheit kaum bekämpft werden konnte.

b) Eine Hilfsorganisation kümmert sich um 1.000 infizierte Personen. Berechnen Sie, wie viele Tote zu erwarten sind. (1 BE)

   $B_{1.000;0{,}708}$ – Begründung siehe Aufgabe a). $\mu = 1.000 \cdot 0,708 = 708$
   Es sind 708 Tote bei 1.000 Infizierten zu erwarten.

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse an (3 BE):

   A: 700 bis 720 infizierte Personen erliegen der Krankheit.

   $P(A) = P(700 \leqq X \leqq 720) \approx 0,5312$

   B: Mehr als 680 infizierte Personen sterben.

   $P(B) = P(X > 680) \approx 0,9713$

   C: Weniger als 250 infizierte Personen überleben.

   $B_{1.000;0{,}292}$ mit Zufallsgröße Y: *Anzahl der infizierten Personen, die Ebola überleben*
   $P(C) = P(Y < 250) = P(X > 750) \approx 0,0014$

d) Bestimmen Sie eine Mindest- und eine Höchstanzahl der Toten, sodass 99% aller erwartbaren Fälle erfasst sind. (2 BE)
   Hinweis: Schauen Sie in gleichen Abständen links und rechts vom Erwartungswert nach kumulierten Wahrscheinlichkeiten, bis Sie das erste Mal auf 0,99 kommen.

   Der Erwartungswert ist $\mu = 708$. Nun folgt eine Lösung durch systematisches Probieren.

   Dafür wird ein beliebiger Abstand links und rechts von μ genutzt: $P(\mu - 8 \leqq X \leqq \mu + 8) = P(700 \leqq X \leqq 716) \approx 0,4456$, also sind 44,56% der Fälle damit erfasst.

   $P(\mu - 20 \leqq X \leqq \mu + 20) = P(688 \leqq X \leqq 728) \approx 0,8461$, also 84,61 % der Fälle.

   $P(\mu - 30 \leqq X \leqq \mu + 30) = P(678 \leqq X \leqq 738) \approx 0,9662$, also 96,62 % der Fälle.

   $P(\mu - 36 \leqq X \leqq \mu + 36) = P(672 \leqq X \leqq 744) \approx 0,9889$, also 98,89 % der Fälle.

   $P(\mu - 37 \leqq X \leqq \mu + 37) = P(671 \leqq X \leqq 745) \approx 0,9909$, also 99,09 % der Fälle.

   $\rightarrow$ Es ist zu 99 % mit 671 bis 745 Toten zu rechnen.

[1] `https://www.nejm.org/doi/full/10.1056/NEJMoa1411100`

Aufgabe 2 (2 + 1 + 3 = 6 BE)

3.3.1 **Es ist bekannt, dass bei der Produktion von Kondensatoren 7 % fehlerhaft sind.**
Der laufenden Produktion werden zufällig 500 Kondensatoren entnommen und auf Funktionstüchtigkeit überprüft.

Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment als Bernoulli-Experiment betrachtet werden darf.

Berechnen Sie die Anzahl der defekten Kondensatoren, die zu erwarten ist.

Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit.
A: Genau 30 Kondensatoren sind defekt.
B: Höchstens 40 Kondensatoren sind defekt.
C: Die Anzahl der Kondensatoren ohne Fehler ist größer als 460 aber kleiner als 470.

Abbildung 1: Abitur M-V A3, 2013

$B_{500;0,07}$ kann angenommen werden, weil es fehlerhafte und nicht fehlerhafte Kondensatoren sind und außerdem ändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht, da es sich um einen bekannten Anteil aus einer Produktion handelt.

$\mu = 500 \cdot 0,07 = 35$. Es sind 35 fehlerhafte Kondensatoren zu erwarten.

Sei die Zufallsgröße X: *Anzahl der fehlerhaften Kondensatoren*:
$P(A) = P(X = 30) \approx 0,0501$ $\quad$ $P(B) = P(X \leqq 40) \approx 0,8331$

$B_{500;0,93}$ und Y: *Anzahl der Kondensatoren ohne Fehler*
$\rightarrow \quad P(C) = P(460 < Y < 470) \approx 0,5698$ $\quad$ Mit X wäre es $P(30 < X < 40) \approx 0,5698$

Aufgabe 3 (6 BE)

6% aller Deutschen haben die Blutgruppe 0-, welche für alle Empfänger verträglich ist.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

$P(X \geqq 1) \geqq 0,95$

Rechnerische Lösung: $P(X \geqq 1) \geqq 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geqq 0,95 \Leftrightarrow 0,05 \geqq P(X = 0)$
$\Leftrightarrow 0,05 \geqq \binom{n}{0} \cdot 0,06^0 \cdot 0,94^n \Leftrightarrow 0,05 \leqq 0,94^n \rightarrow n \geqq 48,4$

Systematisches Probieren: Für $B_{40;0,06}: P(X \geqq 1) \approx 0,9158$ (zu klein)
... Für $B_{48;0,06}: P(X \geqq 1) \approx 9487$ (zu klein) und für $B_{49,0,06}: P(X \geqq 1) \approx 0,9518$

Bei 49 Spendern ist mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Spender mit Blutgruppe 0 dabei.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

$P(X \geqq 2) \geqq 0,90$

Systematisches Probieren: Für $B_{50;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,8100$ (zu klein).
Für $B_{60;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,8821$ (zu klein). Für $B_{70;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,9281$ (zu groß).
Für $B_{63;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,8982$ (zu klein). Für $B_{64;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,90307$

Bei 64 Spendern sind mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Spender mit Blutgruppe 0 dabei.

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 85%iger Wahrscheinlichkeit mindestens vier Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

$P(X \geqq 4) \geqq 0,85$

Systematisches Probieren: Für $B_{90;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,7955$ (zu klein).
Für $B_{100;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8570$ (zu groß). Für $B_{95;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8285$ (zu klein).
Für $B_{98;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8461$ (zu klein). Für $B_{99;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8516$

Bei 99 Spendern sind mit mindestens 85%iger Wahrscheinlichkeit mindestens vier Spender mit Blutgruppe 0 dabei.

Aufgabe 4 (14 BE)

3.4 Aus der Erfahrung weiß man, dass etwa 80 % der medizinischen Einrichtungen Deutschlands in der Radiodiagnostik Präparate mit ^{99m}Tc verwenden.

3.4.1 Fünf zufällig ausgewählte Einrichtungen werden zum Einsatz dieser Präparate befragt. Die Zufallsgröße X entspricht der Anzahl der Einrichtungen, die Präparate mit ^{99m}Tc einsetzen. 7 BE

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt angenommen werden kann.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und stellen Sie diese grafisch dar.

3.4.2 Bei einer anderen Erhebung wurden 50 Einrichtungen befragt. 7 BE

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

A: 90 % der befragten Einrichtungen setzen das Präparat ^{99m}Tc ein.

B: Mindestens 30, aber weniger als 40 der befragten Einrichtungen setzen das Präparat ^{99m}Tc ein.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis an:

C: Die zweite Einrichtung setzt dieses Präparat ein.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis:

D: Genau eine der ersten vier Einrichtungen setzt diese Präparat ein.

Abbildung 2: Abitur M-V A3, 2018

3.4.1 Es gibt die Ergebnisse, dass die Einrichtungen die Präparate mit ^{99m}Tc einsetzen oder eben nicht einsetzen. Außerdem verändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht, da dies ein deutschlandweiter Anteil ist.

$B_{5;0,8}$ kann also angenommen werden und dafür die Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgestellt werden. Hier wird dies nur mit hilfe der Rechnungen (nicht tabellarisch) dargestellt. Das Histogramm muss selbstständig gezeichnet werden.

$P(X=0) \approx 0,0003$; $P(X=1) \approx 0,0064$; $P(X=2) \approx 0,0512$;
$P(X=3) \approx 0,2048$; $P(X=4) \approx 0,4096$; $P(X=5) \approx 0,3277$

3.4.2 $B_{50;0,8}$ kann angenommen werden aufgrund von 3.4.1

90% von 50 Einrichtungen sind 45 Einrichtungen $\rightarrow P(A) = P(X=45) \approx 0,0295$

$P(B) = P(30 \leqq X < 40) \approx 0,4161$

$P(C) = 0,8$, da die Wahrscheinlichkeit sich auch für die zweite Einrichtung 80% ist und gleich bleibt (Bedingung der Binomialverteilung).

Für $P(D)$ muss $B_{4;0,8}$ angenommen werden, da es nur um (die ersten) 4 Einrichtungen geht:
$P(D) = P(X=1) \approx 0,0256$

Aufgabe 5 (3 BE)

Zeigen Sie im Fall $n=3$, dass für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt: $\mu = 3 \cdot p$.
Hinweis: Nutzen Sie $\mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$

Wie bereits im Hinweis mitgeteilt, berechnet sich der Erwartungswert für $n=3$ durch die Formel:

$$\mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$$

Es gilt:

$P(X=0) = \binom{3}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^3 = 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^3) = (1-p)^3$

$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^2 = 3 \cdot p \cdot (1-p)^2 = 3p \cdot (1-2p+p^2) = 3p - 6p^2 + 3p^3$

$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^1 = 3 \cdot p^2 \cdot (1-p) = 3p^2 - 3p^3$

$P(X=3) = \binom{3}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^0 = 1 \cdot p^3 \cdot 1 = p^3$

Also ist

$\mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$

$\mu = 0 \cdot (1-p)^3 + 1 \cdot (3p - 6p^2 + 3p^3) + 2 \cdot (3p^2 - 3p^3) + 3 \cdot p^3$

$\mu = 0 + 3p - 6p^2 + 3p^3 + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3$

$\mu = 3p - 6p^2 + 6p^2 + 6p^3 - 6p^3$

$\mu = 3p$

Aufgabe 6 (2+3+2+3+2+4+4 BE) – IQB-Aufgabe 2017

Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt.
1. Ein Händler erhält eine Lieferung dieser Smartphones

a) Die gelieferten Geräte haben sechs verschiedene Farben. Für die Auslage einiger Geräte im Schaufenster sollen vier Farben ausgewählt werden. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl.

Für das erste Gerät stehen sechs Farben zur Verfügung, für das zweite dann nur noch fünf, für das dritte stehen vier Farben zur Verfügung und für das vierte und letzte Gerät gibt es noch drei mögliche Farben. Daher berechnet sich die Anzahl der Möglichkeiten durch:
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

b) Die Lieferung umfasst 50 Geräte, davon sind drei fehlerhaft. Aus der Lieferung werden zehn Geräte zufällig ausgewählt. Dadurch, dass 10 gleichzeitig ausgewählt werden, ist das wie „Ziehen ohne Zurücklegen" also kann keine Binomialverteilung angenommen werden!!!

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist keines fehlerhaft."

$P(A) = \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{43}{46} \cdot \frac{42}{45} \cdot \frac{41}{44} \cdot \frac{40}{43} \cdot \frac{39}{42} \cdot \frac{38}{41} = \frac{247}{490} \approx 0,5041$

B: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft."

$P(B) = 1 - P(A) \approx 0,4959$

2. Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt. Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte;
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil der Gesamtzahl	10 %	30 %	20 %	40 %
Anteil der fehlerhaften Geräte	5 %	3 %	4 %	2 %

a) Weisen Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3 % beträgt.

$E(X) = 0,1 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,03$
Daher sind ca. 3 % fehlerhafte Geräte zu erwarten.

b) Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde.

Dass das Gerät fehlerhaft ist, ist bekannt. Nun muss bestimmt werden, welchen Anteil, die fehlerhaften Geräte aus Werk A an den fehlerhaften Geräten ausmacht. Daher rechnet man:

$$\frac{\text{P(fehlerhaft in Werk A)}}{\text{P(fehlerhaft)}} = \frac{0,1 \cdot 0,05}{0,03} = \frac{1}{6}$$

c) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 250 zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Anzahl fehlerhafter Geräte, die darunter mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

Dadurch, dass es eine Produktion ist, in der sich der fehlerhafte Anteil nicht ändert und es zwei Ergebnisse gibt, kann eine Binomialverteilung angenommen werden. Dabei ist die Zufallsgröße $X \ldots$ Anzahl der fehlerhaften Geräte und es gilt $B_{250;0,05}$.

Die größte Wahrscheinlichkeit aller 251 Ereignisse hat der Erwartungswert, für den gilt: $\mu = n \cdot p = 250 \cdot 0,05 = 12,5$. Die Frage ist nun, was wahrscheinliche ist: 12 fehlerhafte Geräte oder 13 fehlerhafte Geräte??
$P(X = 12) \approx 0,1160$ und $P(X = 13) \approx 0,1117 \quad \Rightarrow \quad$ 12 fehlerhafte Geräte zu haben unter 250 Geräten ist am wahrscheinlichsten mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 11,60 %.

d) Geben Sie einen Wert von s an, für den mit dem Term $200 \cdot 0,98^s \cdot 0,02 + 0,98^{200}$ im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann. Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.

Hier geht es um Binomialverteilung dort gilt stets:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

für jedes einzelne Ereignis.

$200 \cdot 0,98^s \cdot 0,02$ spricht dafür, dass $p = 0,02$ ist und $(1-p) = 0,98$. Also handelt es sich um Werk D, in welchem 2% fehlerhafte Geräte sind. Da $0,02 = 0,02^1$ ist und das $n = 200$ sein muss, da $\binom{200}{1} = 200$ gilt, muss $s = 200 - 1 = 199$ sein.

Bei $200 \cdot 0,98^{199} \cdot 0,02 + 0,98^{200}$ handelt es sich um $P(X = 1) + P(X = 0) = P(X \leqq 1)$ also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens ein Gerät von 200 Geräten in Werk D fehlerhaft ist.

e) Ermitteln Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 500 Geräte befinden, die nicht fehlerhaft sind.

Die Bedingung ist also $P(X \geqq 500) \geqq 0,9$ es geht aber um die nicht fehlerhaften in Werk C, also ist $p = 0,96$. Nun erfolgt, wie bereits geübt ein systematisches Probieren.

$B_{530;0,96} : P(X \geqq 500) \approx 0,9756$ (zu groß)
$B_{520;0,96} : P(X \geqq 500) \approx 0,4870$ (zu klein)
$B_{525;0,96} : P(X \geqq 500) \approx 0,8423$ (zu klein)
$B_{526;0,96} : P(X \geqq 500) \approx 0,8853$ (zu klein)
$B_{527;0,96} : P(X \geqq 500) \approx 0,9189$ (das erste Mal größer)

$\Rightarrow$ Es müssen mindestens 527 Geräte ausgewählt werden.

Aufgabe 7 (4+2+2+3+4+2+3 BE) – IQB-Aufgabe 2019

In einer Urne befinden sich Kugeln. 35 % der Kugeln sind mit „+1“ beschriftet, 25 % mit „+2“, die übrigen mit „-3“.

1. a) 100-mal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

   $X \ldots$ Anzahl der Kugeln mit „+1“. $B_{100;0,35}$ (Ziehen mit Zurücklegen; zwei Ereignisse)

   A: „Mehr als 30 und weniger als 45 der entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“

   $P(A) = P(30 < X < 45) \approx 0,8024$

   B: „Die ersten drei entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“

   $P(B) = 0,35 \cdot 0,35 \cdot 0,35 \approx 0,0429$

   b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der in der Urne insgesamt enthaltenen Kugeln kleiner als 100 sein kann.

   $35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ und $25\% = \frac{1}{4}$ und die restlichen $40\% = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

   Alle Brüche können auf den gemeinsamen Hauptnenner 20 gebracht werden ($\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$ und $\frac{2}{5} = \frac{6}{20}$). Also können es sogar nur 20 Kugeln sein.

2. Unter Verwendung der Urne wird ein Spiel durchgeführt. Dabei wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zahlen auf den entnommenen Kugeln werden addiert. Ist das Ergebnis positiv, gewinnt der Spieler den Wert der Summe als Betrag in Euro, ist das Ergebnis negativ, verliert er den entsprechenden Betrag.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel mehr als 3 Euro gewinnt.

   Für mehr als 3 Euro ist nur $\{+2; +2\}$ möglich. Also $P(+2; +2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0,0625$

   b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel einen Gewinn erzielt 36 % beträgt.

   $P(+1; +2) + P(+2; +1) + P(+1; +1) + P(+2; +2) = \frac{7}{20} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20} + \frac{7}{20} \cdot \frac{7}{20} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

   $= 0,36$

   c) Ermitteln Sie für einen Spieler mithilfe eines Baumdiagramms den durchschnittlichen Verlust pro Spiel.

   Aus einem Baumdiagramm ergibt sich für die Zufallsgröße $Y \ldots$ Gewinn folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	-6€	-2€	-1€	2€	3€	4€
$P(Y = k)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{14}{50}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{49}{400}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{16}$

   $E(Y) = -6€ \cdot \frac{4}{25} - 2€ \cdot \frac{14}{50} - 1€ \cdot \frac{2}{10} + 2€ \cdot \frac{49}{400} + 3\,€ \cdot \frac{7}{40} + 4€ \cdot \frac{1}{16} = -0,70€$

   Pro Spiel ist mit 70 Cent Verlust zu rechnen.

3. Die Anzahl der in der Urne tatsächlich enthaltenen Kugeln ist n. In die Urne werden zwei zusätzliche Kugeln gelegt, eine davon ist mit „+1" beschriftet, die andere mit „+2". Anschließend wird eine Kugel zufällig entnommen.

   a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+1" beschriftet ist, durch den Term $\dfrac{0,35n+1}{n+2}$ angegeben wird.

   Insgesamt werden 2 Kugeln dazu genommen, daher sind es also insgesamt $n+2$ Kugeln in der Urne.
   Zu den 35% Kugeln (von n) mit „+1" kommt nun eine dazu. Also kommt zu $0,35 \cdot n$ noch eine dazu, was mathematisch $0,35 \cdot n + 1$ bedeutet.

   Daher gilt der Term $\dfrac{\text{Anzahl der Kugeln mit „+1" drauf}}{\text{Anzahl aller Kugeln}} = \dfrac{0,35 \cdot n + 1}{n+2}$

   b) Durch das Hinzufügen nimmt sowohl die Wahrscheinlichkeit dafür zu, dass die entnommene Kugel mit „+1" beschriftet ist, als auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+2" beschriftet ist. Entscheiden Sie, für welche der beiden Wahrscheinlichkeiten die Zunahme größer ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

   Verglichen wird also der Unterschied zwischen $\frac{0,35n+1}{n+2}$ und $0,35$, was durch $\frac{0.35n+1}{n+2} - 0,35$ ausgedrückt werden kann und der Unterschied zwischen $\frac{0,25+1}{n+2}$ und $0,25$, was durch $\frac{0,25n+1}{n+2} - 0,25$ ausgedrückt werden kann.

$$\begin{array}{lcl|l}
\frac{0,35n+1}{n+2} - 0,35 & ??? & \frac{0,25n+1}{n+2} - 0,25 & +0,35 \\
\frac{0,35n+1}{n+2} & ??? & \frac{0,25n+1}{n+2} + 0,1 & \cdot(n+2) \\
0,35n+1 & ??? & 0,25n + 0,1n + 0,2 & \text{zusammenfassen} \\
0,35n+1 & > & 0,35n + 0,2 &
\end{array}$$

   Aus der Umformung ist erkenntlich, dass die linke Seite größer ist als die rechte Seite. Als Rückschluss kann somit auch gesagt werden, dass

$$\frac{0,35n+1}{n+2} - 0,35 > \frac{0,25n+1}{n+2} - 0,25$$

   gilt. Somit ist der Unterschied bei den 25% geringer als bei den 35%.