Aufgaben zu Diskreten Zufallsgrößen (13.05.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

Geben Sie zu jedem Zufallsexperiment die Werte an, welche von der Zufallsgröße angenommen werden können (jeweils 1 BE). Beschreiben Sie die gegebenen Ereignisse mit Worten (jeweils 1 BE).

a) Zwei Würfel werden geworfen und die Augenzahlen werden addiert. Die Zufallsgröße W ist die Augensumme.

$$W = 6$$

$\Omega_W = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$. $W = 6$ heißt: Die Augensumme ist sechs.

b) Eine Münze wird sechs mal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft Zahl oben lag.

$$X < 3$$

$\Omega_X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. $X < 3$ heißt: Es lag weniger als drei Mal Zahl oben.

c) Eine Familie mit vier Kindern wird zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Y gibt an, wie viele Mädchen unter den Kindern der Familie sind.

$$Y \geqq 2$$

$\Omega_Y = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. $Y \geqq 2$ heißt: Es sind mindestens zwei Mädchen unter den Kindern der Familie.

d) Die Zufallsgröße A gibt die Anzahl der Personen in der Klasse 11A an einem Schultag an.

$$A \geqq 21$$

$\Omega_A = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots; 17; 18; 19\}$. $A \geqq 14$ heißt: Es sind mindestens 14 Personen in der 12A anwesend.

Aufgabe 2 (10 BE)

Das Histogramm stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X - *Augensumme beim Werfen zweier Würfel* dar. Nur die Wahrscheinlichkeit für $X = 7$ fehlt.

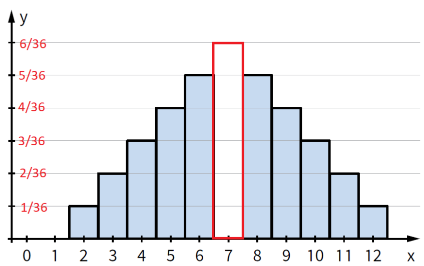


Abbildung 1: EdM 11 Sachsen, S. 280, HW

a) Bestimmen Sie die Werte $P(X = 2)$ und $P(X = 11)$ (2 BE)

$P(X = 2) = P(1; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$;
$P(X = 11) = P(5; 6) + P(6; 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) Beschriften Sie die Markierungen an der Ordinatenachse mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Ergänzen Sie den fehlenden Balken an der Stelle $X = 7$. (2 BE)

Siehe neue Grafik.

c) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse mit Worten. Bestimmen Sie anschließend die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten. (6 BE)

$X \leqq 4$ heißt: Die Augensumme ist höchstens 4. Aus dem Histogramm kann bestimmt werden, dass $P(X \leqq 4) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ist.

$X < 10$ heißt: Die Augensumme ist kleiner als 10. Aus dem Histogramm kann bestimmt werden, dass $P(X < 10) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ ist.

$X \geqq 7$ heißt: Die Augensumme ist mindestens 7. Aus dem Histogramm kann bestimmt werden, dass $P(X \geqq 7) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ ist.

Aufgabe 3 (10 BE)

Schauen Sie sich den Aufgabentext von Aufgabe 6 vom 21.05.2022 an. Auf diese Aufgabe wird nun aufgebaut.
Die Zufallsgrößen X (bei Variante (1)), Y (bei Variante (2)) und Z (bei Variante (3)) beschreiben jeweils die Anzahl der Gewinne.

a) Bestimmen Sie die Verteilungen von X, Y und Z tabellarisch. *(Diese Aufgabe haben Sie prinzipiell schon gemacht.)*(6 BE)

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{59}{180}$	$\frac{71}{180}$	$\frac{7}{36}$
$P(Y = k)$	$\frac{60}{1000}$	$\frac{340}{1000}$	$\frac{440}{1000}$	$\frac{160}{1000}$
$P(Z = k)$	$\frac{143}{2030}$	$\frac{663}{2030}$	$\frac{442}{1015}$	$\frac{34}{203}$

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E(X)$, $E(Y)$ und $E(Z)$ und beurteilen Sie diese. (4 BE)

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{59}{180} + 2 \cdot \frac{71}{180} + 3 \cdot \frac{7}{36} = \frac{17}{10} = 1,7$

$E(Y) = 0 \cdot \frac{60}{1000} + 1 \cdot \frac{340}{1000} + 2 \cdot \frac{440}{1000} + 3 \cdot \frac{160}{1000} = \frac{17}{10} = 1,7$

$E(Z) = 0 \cdot \frac{143}{2030} + 1 \cdot \frac{663}{2030} + 2 \cdot \frac{442}{1015} + 3 \cdot \frac{34}{203} = \frac{17}{10} = 1,7$

Alle Erwartungswerte sind gleich. Der Erwartungswert ist also bei diesen Zufallsexperimenten nicht aussagekräftig.

(Nicht Teil der Aufgabe: Die Standardabweichung wäre aussagekräftiger in Bezug auf die Erwartungswerte.

$$\sigma(X) = \sqrt{0 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{1}{12}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{59}{180}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{71}{180}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{7}{36}\right)^2} \approx 3,132$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{0 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{60}{1000}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{340}{1000}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{440}{1000}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{160}{1000}\right)^2} \approx 3,318$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{0 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{143}{2030}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{663}{2030}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{442}{1015}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{34}{203}\right)^2} \approx 3,111$$

Am verlässlichsten ist also Variante (3), weil $\sigma(Z)$ am kleinsten ist. Wobei $\sigma(X)$ und $\sigma(Z)$ sehr nahe beieinander sind und somit auch Variante (1) und (3) recht ähnlich sind.

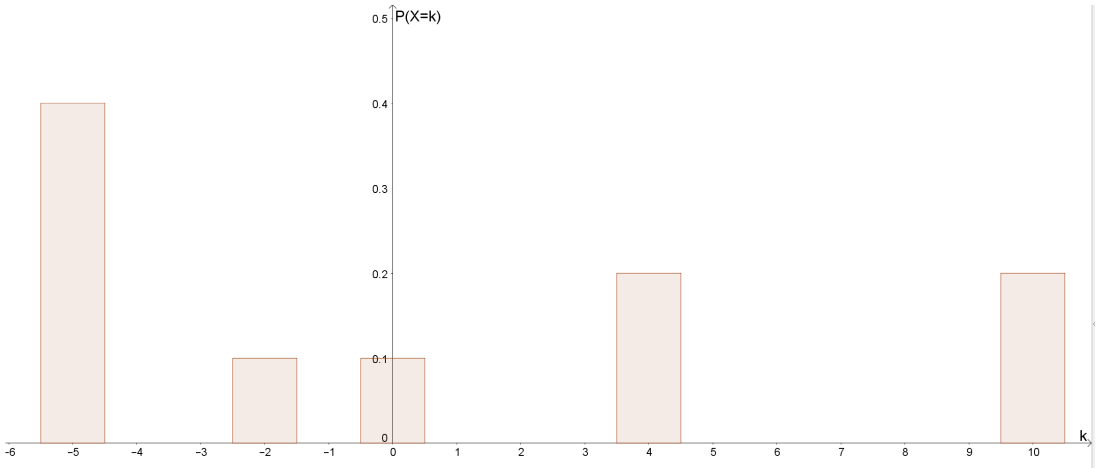
Aufgabe 4 (13 BE)

Die Zufallsgröße X stellt den Gewinn eines Spielers in Euro dar, der bei einem Spiel erzielt werden kann. Die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in Tabellenform gegeben.

k	-5	-2	0	4	10
$P(X=k)$	$0,4$	$0,1$	$0,1$	p	$0,2$

a) Geben Sie den Wert für p an und zeichnen Sie das zu X passende Histogramm. (3 BE)

$p = 0,2$



b) Geben Sie die folgenden Ereignisse und ihre jeweiligen Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Variablen X an. (4 BE)

A – Der Spieler verliert Geld. $P(A) = P(X < 0) = 0,5$

B – Der Spieler gewinnt Geld. $P(B) = P(X > 0) = 0,4$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. (4 BE)

C – Nach zweimaligem Spielen hat der Spieler insgesamt 20,00 € gewonnen.

$P(C) = P(10; 10) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$

D – Nach zweimaligem Spielen hat der Spieler insgesamt 7,00 € verloren.

$P(D) = P(-5; -2) + P(-2; -5) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,08$

d) Beurteilen Sie, ob das Spiel fair ist. (2 BE)

$E(X) = -5 \cdot 0,4 - 2 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,2 = 0,6 > 0 \rightarrow$ das Spiel ist nicht fair, da es vorteilhaft für die spielende Person ist.

Aufgabe 5 (2 BE)

Gegeben ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße B, welche die Werte -5,-2,1,3,7 und 11 annimmt. Tragen Sie den fehlenden Wert für $B = 11$ ins Histogramm ein und begründen Sie kurz.

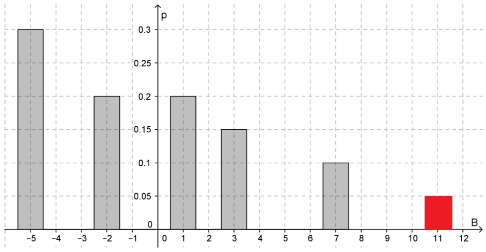


Abbildung 2: GeoGebra, Steffen Hintze 2017

Es ist $P(X = -5) + P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 7) = 0,95$, also muss $P(X = 11) = 0,05$ sein, da dies einerseits der einzige Wert der Zufallsgröße ist, der noch fehlt und andererseits dies noch bis zur 1 (sicheres Ereignis) fehlt.