Aufgaben zu Grundbegriffen der Stochastik (21.04.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Seien $I_1 = [1, 3), I_2 = [3, 7], I_3 = (-2, 10)$.
Bilden Sie die folgenden Mengen.

a) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

b) $I_1 \cap I_3 = [1, 3) = I_1$

c) $I_1 \cup I_2 = [1, 7]$

d) $I_1 \setminus I_2 = [1, 3) = I_1$

e) $I_3 \setminus I_2 = (-2, 1) \cup [3, 10)$

f) $(I_1 \cup I_2) \cap I_3 = [1, 7]$

Aufgabe 2 (6 BE)

Es werden zwei ideale und unterscheidbare Würfel geworfen. Es seien folgende Ereignisse gegeben:
$A =$ Augensumme ist ungerade
$B =$ wenigstens eine 5 erscheint.
Beschreiben Sie $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse.

$A \cap B$ – Die Augenzahl ist ungerade und es erscheint mindestens eine 5, also
$A \cap B = \{(2, 5), (4, 5), (6, 5), (5, 2), (5, 4)(5, 6)\}$ und $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$A \cup B$ – Die Augenzahl ist ungerade oder es erscheint mindestens eine 5, also
$A \cup B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
$(4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$ und $P(A \cup B) = \frac{23}{36}$

$A \cap \overline{B}$ – Die Augenzahl ist ungerade und es erscheint keine Augenzahl gleich 5, also
$A \cap \overline{B} = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$ und
$P(A \cap \overline{B}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Aufgabe 3 (4 BE)

Für zwei zufällige Ereignisse A und B seien die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\overline{A}) = \frac{4}{5}, \qquad P(A \cup B) = \frac{2}{5}, \qquad P(B) = \frac{1}{3}$$

bekannt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

a) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

b) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ (vgl. Folie 23). Also ist $P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

c) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$

d) $P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(A \setminus B) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$.

(Tipp: Nutzen Sie eventuell eine Zeichnung dafür.)

Aufgabe 4 (4 BE)

In einem Sack sind vier schwarze und fünf weiße Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) mindestens 2 weiße Kugeln gezogen werden.

$P(A) = P(wws)+P(wsw)+P(sww)+P(www) = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{75}{126} = \frac{25}{42}$

b) höchstens 2 weiße Kugeln gezogen werden.

$P(B) = 1 - P(www) = 1 - \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = 1 - \frac{15}{126} = \frac{111}{126} = \frac{37}{42}$

c) genau 2 weiße Kugeln gezogen werden.

$P(A) = P(wws) + P(wsw) + P(sww) = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$

Aufgabe 5 (4 BE)

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt der Norm genügt, beträgt 0,96. In der Kontrolle werden normgerechte Produkte mit der Wahrscheinlichkeit 0,90 und nicht normgerechte mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 als normgerecht angesehen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt als normgerecht angesehen wird.

$P(\text{normgerecht, als normgerecht angesehen})+P(\overline{\text{normgerecht}};\text{als normgerecht angesehen}) = 0{,}96\cdot 0{,}9 + 0{,}04\cdot 0{,}05 = 0{,}866.$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt, das in der Kontrolle als normgerecht angesehen wird, auch wirklich normgerecht ist.

$$\frac{P(\text{normgerecht und als normgerecht angesehen})}{P(\text{normgerecht})} = \frac{0{,}96\cdot 0{,}9}{0{,}866} \approx 0{,}9977$$

Aufgabe 6 (6 BE)

Es seien drei Urnen U_1, U_2 und U_3 mit je 10 Losen gegeben, wobei die erste 4, die zweite 5 und die dritte 8 Gewinne enthält. Es werden drei Lose auf drei verschiedene Arten gezogen.

(1) Es wird zufällig eine Urne ausgewählt und daraus drei Lose gezogen.
(2) Es wird aus jeder Urne je ein Los gezogen.
(3) Es werden alle Lose der drei Urnen in eine Urne gegeben und daraus zufällig drei Lose gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_i $(i = 1, 2, 3)$, dass bei der Auswahlart (i), alle Lose Gewinne sind und runden Sie auf drei Stellen nach dem Komma. Begründen Sie, welches Verfahren die größte Wahrscheinlichkeit hat.

$P(1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8} = \frac{7}{36} \approx 0{,}194$

$P(2) = \frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{8}{10} = \frac{160}{1000} = 0{,}160$

$P(3) = \frac{17}{30}\cdot\frac{16}{29}\cdot\frac{15}{28} = \frac{34}{203} \approx 0{,}167$

Das Verfahren (1) hat die höchste Wahrscheinlichkeit, drei Gewinne zu ziehen.

Aufgabe 7 (4 BE)

Bei einem Sportfest wird eine Schule durch sechs Schüler*innen der Klasse 8, acht Schüler*innen der Klasse 9 und vier Schüler*innen der Klasse 10 vertreten. Vor der Eröffnung werden zwei Schüler*innen dieser Schule ausgelost, die alle Sportgeräte auf die Wettkampfstätten zu verteilen haben.
Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
Ereignis A: Beide Schüler*innen sind aus der 8. Klasse.

$P(A) = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} = \frac{5}{51} \approx 0,098$

Ereignis B: Eine Person ist aus Klasse 9 und eine Person aus Klasse 10.

$P(B) = \frac{8}{18} \cdot \frac{4}{17} + \frac{4}{18} \cdot \frac{8}{17} = \frac{32}{153} \approx 0,209$

Ereignis C: Es wird keine Person aus Klasse 10 ausgewählt.

$P(C) = P(8,8) + P(8,9) + P(9,8) + P(9,9) = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} + \frac{6}{18} \cdot \frac{8}{17} + \frac{8}{17} \cdot \frac{6}{17} + \frac{8}{17} \cdot \frac{7}{17} = \frac{91}{153} \approx 0,595$

Aufgabe 8 (3 BE)

Abitur 2008 hilfsmittelfrei: Eine Firma stellt an jedem Arbeitstag (Montag bis Freitag) gleich viele Handys her. Die regelmäßig durchgeführte Gütekontrolle ergibt, dass jeweils die am Montag hergestellten Handys mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% fehlerhaft sind. An den anderen Arbeitstagen (Dienstag bis Freitag) liegt die Fehlerquote in der Produktion jeweils bei 5%.
Der Produktion einer Woche wird zufällig ein Handy entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A – Das entnommene Handy ist fehlerfrei und wurde an einem Montag produziert.

$P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{50} = \frac{18}{100} = 0,18$

B – Das entnommene Handy ist fehlerfrei.

$P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{4}{5} \cdot \frac{19}{20} = \frac{18}{100} + \frac{76}{100} = \frac{94}{100} = 0,94$