Lagebeziehungen, Geraden und Ebenen (24.03.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

Eine Gerade g ist gegeben durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

a) Geben Sie eine zweite zu g identische Gerade h an.

z.B. $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

b) Geben Sie eine zweite zu g parallele Gerade k an.

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$

c) Zeigen Sie, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} 29 \\ 20 \\ -67 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Parameterdarstellung von g ist.

Die Richtungsvektoren sind kollinear, weil $-5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix}$ gilt.

Fehlt nur noch der Nachweis, dass der Punkt $P(29|20|-67)$ auch auf g liegt.

$$\begin{pmatrix} 29 \\ 20 \\ -67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \\ -68 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \rightarrow \; t = 17 \\ \rightarrow \; t = 17 \\ \rightarrow \; t = 17 \end{array}\right\} \rightarrow t = 17$$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 29 \\ 20 \\ -67 \end{pmatrix} \in g \quad \Rightarrow \quad$ Die Geraden sind identisch.

d) Bestimmen Sie die Spurpunkte von g.

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \tfrac{1}{4},\ x_1 = -\tfrac{9}{2},\ x_2 = \tfrac{13}{4} \Rightarrow S_{12}\left(-\tfrac{9}{2}|\tfrac{13}{4}|0\right)$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow t = -3,\ x_1 = -11,\ x_3 = 13 \Rightarrow S_{13}(-11|0|13)$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \tfrac{5}{2},\ x_2 = \tfrac{11}{2},\ x_3 = -9 \Rightarrow S_{23}\left(0|\tfrac{11}{2}|-9\right)$$

Aufgabe 2 (1+1+3+3 BE)

Eine Tunnelbohrmaschine startet am Tunnelanfang $A(250|780|1030)$ und wird täglich um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ vorangetrieben (Einheit m).

a) Berechnen Sie, wie viele Meter die Bohrmaschine täglich schafft.

$\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow$ Die Bohrmaschine schafft täglich 6 m.

b) Nach 10 Tagen ist die Bohrung im Punkt B beendet. Geben Sie die Koordinaten des Tunnelendes B an.

$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 290 \\ 820 \\ 1010 \end{pmatrix} \Rightarrow B(290|820|1010)$

c) Erläutern Sie, warum die Parameterdarstellung $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $k \in [0; 10]$ den Tunnel beschreibt und geben Sie drei Punkte innerhalb des Tunnels an.

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{v};\ k \in [0; 10]$. Deshalb sind zumindest die Vektoren schon einmal korrekt. Bleibt nur noch die Frage übrig, warum $k \in [0; 10]$ ist. Für $k = 0$ kommt der Anfangspunkt A heraus und für $k = 10$ kommt der in b) berechnete Punkt B heraus.

d) Prüfen Sie, ob die folgenden Punkte auf der Tunnelstrecke liegen:

$E(270|800|1020), F(300|820|1010), G(310|840|1000)$.

$\begin{pmatrix} 270 \\ 800 \\ 1020 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow k = 5 \Rightarrow E$ liegt im Tunnel

$\begin{pmatrix} 300 \\ 820 \\ 1010 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \rightarrow \ k = 12,5 \\ \rightarrow \ k = 10 \\ \rightarrow \ k = 10 \end{array}\right\}$ es gibt kein $k \Rightarrow F$ liegt nicht im Tunnel

$\begin{pmatrix} 310 \\ 840 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow k = 15 \Rightarrow G$ liegt nicht im Tunnel (sondern außerhalb)

Aufgabe 3 (3+2 BE)

Ein 200m hoher Sendemast steht im Punkt $F(40|-30|0)$ senkrecht auf einer ebenen Bodenfläche, die in der x_1-x_2-Ebene liegt (Angaben in m).
Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die Bodenfläche.

a) Die Sonnenstrahlen, die man als zueinander parallel annehmen kann, fallen in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix}$ ein. In welchem Punkt S endet der Schatten des Sendemastes?

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 200 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung des Schattens der Sendemastspitze.

Die x_1-x_2-Ebene hat die Gleichung $\varepsilon_{12} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 200 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 4, r = 160, s = 90 \rightarrow S(160|90|0)$$

b) Berechnen Sie die Länge des Schattens sowie den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen.

$$\left| \begin{pmatrix} 160 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{28800} \approx 169,71$$

Der Schatten des Sendeturmes ist etwa 170 m lang.

$$\sin(\phi) = \frac{\begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} \approx -0,76 \quad \overset{\sin^{-1}}{\Rightarrow} \quad \phi \approx 49,7^\circ$$

Aufgabe 4 (3+2+2 BE)

Die Position von Flugzeugen im Luftraum kann man durch Punkte in einem räumlichen Koordinatensystem mit der Einheit km beschreiben, bei dem die als Ebene betrachtete Erdoberfläche in der x_1-x_2-Ebene liegt. Ein Passagierflugzeug bewegt sich auf einem als geradlinig angenommenen Kurs von Punkt $P(8,5|-28|7,5)$ pro Sekunde um $\begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zum gleichen Zeitpunkt, in dem sich das Passagierflugzeug im Punkt P befindet, fliegt ein zweites Flugzeug vom Punkt $Q(22|15,5|7,3)$ aus geradlinig weiter, dass es sich pro Sekunde um den Vektor $\begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix}$ bewegt.

a) Untersuchen Sie, ob es auf den beiden Flugbahnen zu einer Kollision kommen kann.

$$\begin{pmatrix} 8,5 \\ -28 \\ 7,5 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 15,5 \\ 7,3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Daher schneiden sich die beiden Flugbahnen nicht.

$$\underline{\text{Abstand:}} \quad \frac{det \begin{pmatrix} -0,12 & 0,1 & 13,5 \\ 0,175 & -0,05 & 43,5 \\ 0 & 0,001 & -0,2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix} \right|} \approx \frac{0,009883}{0,011502} \approx 0,8592 \text{ km entspricht } 859,2 \text{ m}$$

b) Geben Sie die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge an.

Flugzeug 1 fliegt pro Sekunde: $\left| \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \approx 0,2122 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 212,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 763,9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Flugzeug 2 fliegt pro Sekunde: $\left| \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix} \right| \approx 0,1118 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 111,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 402,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) Berechnen Sie die Strecke, die Flugzeug 1 und Flugzeug 2 nach 15 Sekunden jeweils zurückgelegt haben.

Strecke von Flugzeug 1: $212,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15\text{s} = 3395,2\text{m} \approx 3,4\text{km}$

Strecke von Flugzeug 2: $111,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15\text{s} = 1677\text{m} \approx 1,68\text{km}$

Aufgabe 5 (8 BE)

a) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 3x_1 + 2x_3 = 6$ parallel zur x_2-Achse ist.

Variante 1 – Parametergleichung aufstellen durch drei Punkte:

Zum Beispiel: $S_1(2|0|0)$, $S_3(0|0|3)$, $P(4|1|-3)$

$$\rightarrow \quad \varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Die x_2-Achse hat die Gleichung $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Vgl. Sitzung vom 03. März 2022)

Gleichsetzen führt dazu, dass keine Lösung existiert. Deshalb muss die Gerade parallel zur Ebene sein.

b) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 2x_1 + 5x_2 = -10$ parallel zur x_3-Achse ist.

Variante 2 – Geradengleichung in die Koordinatenform einsetzen:

Die x_3-Achse hat die Gleichung $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Vgl. Sitzung vom 03. März 2022)

Einsetzen in die Koordinatenform ergibt: $2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \neq -10$, also gibt es keine Lösung. Daher muss die Gerade parallel zur Ebene sein.

c) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 3x_2 + 5x_3 = 9$ parallel zur x_1-Achse ist.

Analog zu Aufgabe a) oder b)

d) Ziehen Sie eine Schlussfolgerung aus den Aufgabenteilen a) bis c).

Immer wenn eine Komponente nicht in der Koordinatenform der Ebene vorkommt, ist die Ebene parallel zur entsprechenden Achse.

Aufgabe 6 (4 BE)

Bestimmen Sie die Spurpunkte der gegebenen Ebenen.

a) $\varepsilon : 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 12$ $\qquad S_1(4|0|0)$, $S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|-\frac{12}{5})$

b) $\varepsilon : 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 12$ $\qquad S_1(3|0|0)$, $S_2(0|-6|0)$ und $S_3(0|0|2)$

Aufgabe 7 (3+3+2+3+4+3 BE)

Gegeben seien die Punkte $A(0|0|8)$, $B(1|0|7)$, $C(1|1|3)$ und $D(0|2|0)$.

a) Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Ebene durch A, B und C in Parameterform und Koordinatenform.

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon : x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$

b) Weisen Sie nach, dass alle vier Punkte in einer Ebene liegen und ein Trapez bilden.

D in die Koordinatengleichung einsetzen: $0 + 4 \cdot 2 + 0 = 8$ ist eine wahre Aussage, also ist $D \in \varepsilon$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Da $2 \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ gilt, ist $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$. Die anderen Vektoren sind weder parallel noch gleich lang. Somit ist $ABCD$ ein Trapez, da es ein Paar parallele Seiten besitzt.

c) Bestimmen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs zur Ebene.

$$d(O, E) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 8 \right|}{\sqrt{18}} \approx 1{,}89 \text{ LE}.$$

d) Bestimmen Sie den Abstand der gegebenen Punkte zur Ebene: $P_1(0|8|15), P_2(1|2|3), P_3(30|50|70)$

$$d(P_1, E) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 8 \right|}{\sqrt{18}} \approx 9{,}19 \text{ LE}; \ d(P_2, E) \approx 0{,}94 \text{ LE}; \ d(P_3, E) \approx 68{,}83 \text{ LE}$$

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

$$\tfrac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| + \tfrac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| + \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| + \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \text{ FE} + \sqrt{18} \text{ FE} \approx 6{,}36 \text{ FE}$$

f) Bestimmen Sie den Winkel beim Punkt A in diesem Trapez.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \tfrac{8}{\sqrt{136}} \quad \overset{\cos^{-1}}{\Rightarrow} \quad \alpha \approx 46{,}7^\circ$$

$$\cos(\phi) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} \approx 0{,}236 \quad \overset{\cos^{-1}}{\Rightarrow} \quad \phi \approx 76{,}4^\circ$$