Lagebeziehungen, Winkel und Abstände (24.03.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

Eine Gerade g ist gegeben durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

a) Geben Sie eine zweite zu g identische Gerade h an.

b) Geben Sie eine zweite zu g parallele Gerade k an.

c) Zeigen Sie, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} 29 \\ 20 \\ -67 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Parameterdarstellung von g ist.

d) Bestimmen Sie die Spurpunkte von g.

Aufgabe 2 (1+1+3+3 BE)

Eine Tunnelbohrmaschine startet am Tunnelanfang $A(250|780|1030)$ und wird täglich um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ vorangetrieben (Einheit m).

a) Berechnen Sie, wie viele Meter die Bohrmaschine täglich schafft.

b) Nach 10 Tagen ist die Bohrung im Punkt B beendet. Geben Sie die Koordinaten des Tunnelendes B an.

c) Erläutern Sie, warum die Parameterdarstellung $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $k \in [0; 10]$ den Tunnel beschreibt und geben Sie drei Punkte innerhalb des Tunnels an.

d) Prüfen Sie, ob die folgenden Punkte auf der Tunnelstrecke liegen:

$E(270|800|1020), F(300|820|1010), G(310|840|1000)$.

Aufgabe 3 (3+2 BE)

Ein 200m hoher Sendemast steht im Punkt $F(40|-30|0)$ senkrecht auf einer ebenen Bodenfläche, die in der x_1-x_2-Ebene liegt (Angaben in m).
Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die Bodenfläche.

a) Die Sonnenstrahlen, die man als zueinander parallel annehmen kann, fallen in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix}$ ein. In welchem Punkt S endet der Schatten des Sendemastes?

b) Berechnen Sie die Länge des Schattens sowie den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen.

Aufgabe 4 (3+2+2 BE)

Die Position von Flugzeugen im Luftraum kann man durch Punkte in einem räumlichen Koordinatensystem mit der Einheit km beschreiben, bei dem die als Ebene betrachtete Erdoberfläche in der x_1-x_2-Ebene liegt. Ein Passagierflugzeug bewegt sich auf einem als geradlinig angenommenen Kurs von Punkt $P(8,5|-28|7,5)$ pro Sekunde um $\begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zum gleichen Zeitpunkt, in dem sich das Passagierflugzeug im Punkt P befindet, fliegt ein zweites Flugzeug vom Punkt $Q(22|15,5|7,3)$ aus geradlinig weiter, dass es sich pro Sekunde um den Vektor $\begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix}$ bewegt.

a) Untersuchen Sie, ob es auf den beiden Flugbahnen zu einer Kollision kommen kann. Falls nicht, bestimmen Sie den minimalen Abstand beider Flugzeuge.

b) Geben Sie die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge an.

c) Berechnen Sie die Strecke, die Flugzeug 1 und Flugzeug 2 nach 15 Sekunden jeweils zurückgelegt haben.

Aufgabe 5 (8 BE)

a) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 3x_1 + 2x_3 = 6$ parallel zur x_2-Achse ist.

b) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 2x_1 + 5x_2 = -10$ parallel zur x_3-Achse ist.

c) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 3x_2 + 5x_3 = 9$ parallel zur x_1-Achse ist.

d) Ziehen Sie eine Schlussfolgerung aus den Aufgabenteilen a) bis c).

Aufgabe 6 (4 BE)

Geben Sie die Spurpunkte der gegebenen Ebenen.

a) $\varepsilon : 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 12$ b) $\varepsilon : 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 12$

Aufgabe 7 (3+3+2+3+4+3 BE)

Gegeben seien die Punkte $A(0|0|8)$, $B(1|0|7)$, $C(1|1|3)$ und $D(0|2|0)$.

a) Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Ebene durch A, B und C in Parameterform und Koordinatenform.

b) Weisen Sie nach, dass alle vier Punkte in einer Ebene liegen und ein Trapez bilden.

c) Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs zur Ebene.

d) Bestimmen Sie den Abstand der gegebenen Punkte zur Ebene: $P_1(0|8|15)$, $P_2(1|2|3)$, $P_3(30|50|70)$.

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

f) Bestimmen Sie den Winkel im Punkt A dieses Trapezes. Geben Sie außerdem den Neigungswinkel des Trapezes gegenüber der $x_2 - x_3$-Ebene an.