Geraden- und Ebenengleichungen (03.03.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (2+9+2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|0)$, $B(2|1|2)$, $C(0|3|0)$ und $D(2|0|5)$.

a) Stellen Sie die Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

b) Bestimmen Sie verschiedene Geraden und Ebenengleichungen (Parameter- und Koordinatenform) durch die gegebenen Punkte.

$$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R} \qquad g_{BC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$$

$$g_{AC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R} \qquad g_{BD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$$

$$g_{AD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R} \qquad g_{CD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$$

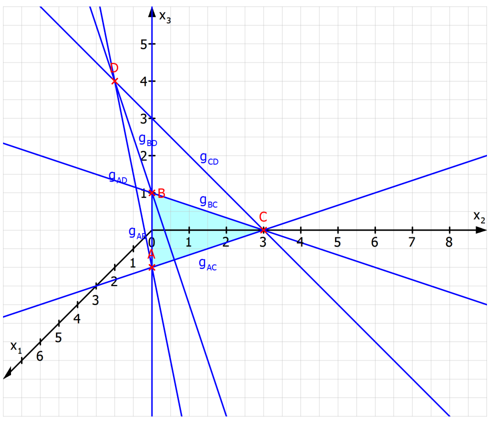
$$\varepsilon_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix};\ r,s\in\mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad -4x_1 - 4x_2 = -12$$

$$\varepsilon_{ABD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix};\ r,s\in\mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad 2x_1 = 4$$

$$\varepsilon_{ACD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix};\ r,s\in\mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad 10x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 30$$

$$\varepsilon_{BCD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix};\ r,s\in\mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 26$$

c) Zeichnen Sie eine Ebene und eine Gerade aus b) in das Koordinatensystem von a) ein.



Aufgabe 2 (6+2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|-2)$, $B(1|2|-1)$ und $C(1|1|4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d|1|4)$.

a) Zeigen Sie, dass A, B und C die Eckpunkte eines Dreiecks sind und bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene in Parameter- und Koordinatenform, in der dieses Dreieck liegt.

<u>Weg 1</u> (linear unabhängig):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \rightarrow & k = 1 \\ \rightarrow & k = 0 \\ \rightarrow & k = 6 \end{matrix}\right\} k \text{ ist nicht eindeutig}$$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig $\rightarrow$ ABC bildet ein Dreieck, weil sie nicht auf einer Geraden liegen.

<u>Weg 2</u> (Geradengleichung)

$$g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punktprobe von C auf g_{AB}

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \rightarrow & t = 1 \\ \rightarrow & t = 0 \\ \rightarrow & t = 6 \end{matrix}\right\} t \text{ ist nicht eindeutig}$$

$\rightarrow$ C liegt nicht auf der Geraden durch AB $\rightarrow$ ABC bildet ein Dreieck.

Ebenengleichung in Parameterform: $\varepsilon_{ABC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Ebenengleichung in Koordinatenform: $\varepsilon_{ABC} : 6x_1 - 15x_2 - 3x_3 = -21$

b) Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig. Ermitteln Sie den Wert von d.

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} d-1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ Es muss gelten: $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BD} = 0$ (rechtwinklig in B)

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BD} = -3d - 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = -3d - 1 \Leftrightarrow d = -\tfrac{1}{3}$$

Aufgabe 3 (8+2+2 BE)

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene ε mit

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ t \in \mathbb{R} \qquad \varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ r, s \in \mathbb{R}$$

a) Geben Sie jeweils 4 Punkte auf g und auf ε an.

Beliebige t in g einsetzen und beliebige r, s in ε einsetzen $\rightarrow$ Punkte

z.B. $t = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow P_1(6|5|5) \in g$

z.B. $r = -2, s = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow P_2(-6|-4|15) \in \varepsilon$

b) Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(2|-3|5)$ von der Geraden g in der Ebene ε liegt.

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow}$ keine Lösung $\rightarrow C \notin \varepsilon$

c) Begründen Sie, dass g parallel zu ε ist.

Die Richtungsvektoren sind komplanar, da $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt.

Also liegt der Richtungsvektor von g parallel zu ε oder sogar in der Ebene.
Da aber nach Aufgabe b) der Stützvektor der Geraden nicht in ε liegt, ist $g \parallel \varepsilon$.

d) Führen Sie die Überprüfung aus b) mithilfe der Koordinatenform von ε durch.

$\varepsilon : -12x_3 = -180$ bzw. $\varepsilon : x_3 = 15$
Nun erkennt man bereits an der x_3-Koordinate des Punktes $(2|-3|5)$, dass gilt: $5 \neq 15$, damit liegt der Punkt nicht in der Ebene.

e) Beschreiben Sie, wie Sie mithilfe der Koordinatenform von ε begründen können, dass g parallel zu ε ist.

Eine Gerade ist parallel zu einer Ebene in Koordinatenform, wenn dass Skalarprodukt aus dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden Null ist (sie orthogonal zueinander sind). In diesem Fall gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad g \perp \vec{n_\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad g \parallel \varepsilon$$

Aufgabe 4 (2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|0|0)$, $B(6|2|1)$ und $C(8|-1|3)$.
Zeigen Sie mithilfe einer Geradengleichung, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

$$g_{AB} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\ ;\ t \in \mathbb{R}$$

Punktprobe: $$\begin{pmatrix}8\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l}\rightarrow \quad t = 2\\ \rightarrow \quad t = -\frac{1}{2}\\ \end{array}\right\} t \text{ ist nicht eindeutig}$$

$\rightarrow C \notin g_{AB}$

Aufgabe 5 (4 BE)

Gegeben sind die Punkte $R(-2|-1|0)$ und $S(4|2|0)$.

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}$$

Geben zwei Punkte T_1 und T_2 so an, dass

a) T_1 und T_2 auf der Strecke $\overline{RS}$ liegen.

   Wählen Sie ein t mit $0 \leqq t \leqq 1$, dann liegt das Ergebnis auf der Strecke $\overline{RS}$.
   Wähle $t = \frac{1}{3} \rightarrow T_1(0|0|0)$ oder wähle $t = \frac{1}{2} \rightarrow T_2(1|0,5|0)$ Weitere Punkte möglich.

b) T_1 und T_2 nicht auf der Geraden h durch R und S liegen.

   Möglichkeit 1: Beliebigen Punkt wählen und dann Punktprobe machen.

   Möglichkeit 2: Einen beliebigen Punkt mit $x_3 \neq 0$ nehmen, weil:

   $$\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\x_3\end{pmatrix} \text{ nur erfüllt ist für } x_3 = 0 \text{ und sonst nie.}$$

   Also z.B. $T_1(0|0|5)$ oder $T_2(0|0|7)$

Begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 6 (3 + 4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(3|4|0)$, $B(-2|6|4)$, $C(7|-2|2)$ und $D(1|-2|8)$

a) Zeigen Sie, dass A, B und C ein Dreieck bilden.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad k \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \to & k = -\frac{4}{5} \\ \to & k = -3 \\ \to & k = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} k \text{ ist nicht eindeutig}$$

$\to$ $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind nicht kollinear $\to$ ABC bildet ein Dreieck, weil sie nicht auf einer Geraden liegen.

b) Zeigen Sie, dass D nicht in der Ebene liegt, welche durch die Punkte A, B und C verläuft.

$$\varepsilon_{ABC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} ;\ r, s \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ABC} : 28x_1 + 36x_2 + 38x_3 = 228$$

Punkt D in die Koordinatengleichung einsetzen führt zu:
$28 \cdot 1 + 36 \cdot (-2) + 38 \cdot 8 = 260 \neq 228 \Rightarrow D \notin \varepsilon_{ABC}$

Zu) Berechnen Sie den Flächeninhalt des $\triangle ABC$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \\ 38 \end{pmatrix} \right| \approx 29{,}68 \text{ FE}$$

Aufgabe 7 (10 BE)

Geben Sie die Koordinatenform der Ebene an.

a) Gegeben ist der Punkt $A(4|0|3)$ und der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\varepsilon : -x_1 + 12x_2 + 5x_3 = 11$

b) Gegeben sind die Punkte $A(1|1|0)$, $B(2|3|3)$ und $C(1|2|4)$.

$$\epsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \quad r, s \in \mathbb{R} \quad \to \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon : 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$

c) Gegeben sind die Punkte $A(-1|3|5)$, $B(2|3|6)$ und $C(5|5|5)$.

$$\epsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad r, s \in \mathbb{R} \quad \to \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon : -2x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 50$

d) Gegeben sind die Punkte $A(2|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|6)$.

$\varepsilon : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{6} = 1$

e) Gegeben sind die Punkte $A(-3|0|0)$, $B(0|15|0)$ und $C(0|0|\frac{2}{3})$.

$\varepsilon : -\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{15} + \frac{3x_3}{2} = 1$

Aufgabe 8 (15 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-2)$, $B(6|3|2)$ und $C(8|-1|2)$.

$\varepsilon_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Gegeben sind weiterhin die Punkte

$$P_1(4|2|0), P_2(12|1|6), P_3(10|3|5), P_4(10|0|4) \text{ und } P_5(-2|-1|-6)$$

. Von diesen Punkten weiß man, dass jeder Punkt jeweils eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

- Der Punkt liegt in der Ebene ε_{ABC}, aber nicht auf der Geraden g_{AB}. (1)
- Der Punkt liegt auf der Geraden g_{AB} und in der Ebene ε_{ABC}. (2)
- Der Punkt ist Eckpunkt des Parallelogramms $ABDC$. (3)
- Der Punkt liegt nicht in der Ebene ε_{ABC}. (4)
- Der Punkt liegt auf der Strecke $\overline{AB}$ (5)

Ordnen Sie die gegebenen Punkte begründet der jeweiligen Eigenschaft zu.

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ABC} \quad \stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad r = \frac{1}{2}, s = 0$ dies entspricht der Bedingung (5).

$\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ABC} \quad \stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad r = 1, s = 1$ dies entspricht der Bedingung (3).

$\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ABC} \quad \stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow}$ keine Lösung dies entspricht der Bedingung (4).

$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ABC} \quad \stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad r = \frac{1}{2}, s = 1$ dies entspricht der Bedingung (1).

$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ABC} \quad \stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad r = -1, s = 0$ dies entspricht der Bedingung (2).

Aufgabe 9 (3+1 BE)

Geben Sie die Gleichung der Ebene $\varepsilon: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ in Parameterform an. Liegt der Punkt $P(0|8|15)$ in der Ebene?

Drei Punkte der Ebene angeben. Zum Beispiel: $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|2)$.

Parametergleichung aufstellen: $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Punktprobe. P in die Koordinatenform einsetzen führt zu: $0 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 15 = 61 \neq 6 \quad \rightarrow \quad P \notin \varepsilon$

Aufgabe 10 (3 BE)

Ermitteln Sie die parameterfreie Darstellung der Ebenengleichung

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \varepsilon : 7x_1 + 14x_2 + 7x_3 = d \quad \rightarrow$ Punkt $(4|-1|4)$ einsetzen

$\rightarrow \quad \varepsilon : 7x_1 + 14x_2 + 7x_3 = 42$