Geraden- und Ebenengleichungen (03.03.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (2+9+2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|0)$, $B(2|1|2)$, $C(0|3|0)$ und $D(2|0|5)$.

a) Stellen Sie die Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

b) Bestimmen Sie verschiedene Geraden und Ebenengleichungen (Parameter- und Koordinatenform) durch die gegebenen Punkte.

c) Zeichnen Sie eine Ebene und eine Gerade aus b) in das Koordinatensystem von a) ein.

Aufgabe 2 (6+2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|-2)$, $B(1|2|-1)$ und $C(1|1|4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d|1|4)$.

a) Zeigen Sie, dass A, B und C die Eckpunkte eines Dreiecks sind und bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene in Parameter- und Koordinatenform, in der dieses Dreieck liegt.

b) Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig. Ermitteln Sie den Wert von d.

Aufgabe 3 (8+2+2 BE)

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene ε mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad \varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$$

a) Geben Sie jeweils 4 Punkte auf g und auf ε an.

b) Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(2|-3|5)$ von der Geraden g in der Ebene ε liegt.

c) Begründen Sie, dass g parallel zu ε ist.

d) Führen Sie die Überprüfung aus b) mithilfe der Koordinatenform von ε durch.

e) Beschreiben Sie, wie Sie mithilfe der Koordinatenform von ε begründen können, dass g parallel zu ε ist.

Aufgabe 4 (2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|0|0)$, $B(6|2|1)$ und $C(8|-1|3)$.
Zeigen Sie mithilfe einer Geradengleichung, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 5 (4 BE)

Gegeben sind die Punkte $R(-2|-1|0)$ und $S(4|2|0)$. Geben Sie zwei Punkte T_1 und T_2 so an,

a) dass T_1 und T_2 auf der Strecke $\overline{RS}$ liegen.

b) dass T_1 und T_2 nicht auf der Geraden h durch R und S liegen.

Begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 6 (3 + 4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(3|4|0)$, $B(-2|6|4)$, $C(7|-2|2)$ und $D(1|-2|8)$

a) Zeigen Sie, dass A, B und C ein Dreieck bilden.

b) Zeigen Sie, dass D nicht in der Ebene liegt, welche durch die Punkte A, B und C verläuft.

Zu) Berechnen Sie den Flächeninhalt des $\triangle ABC$.

Aufgabe 7 (10 BE)

Geben Sie die Koordinatenform der Ebene an.

a) Gegeben ist der Punkt $A(4|0|3)$ und der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) Gegeben sind die Punkte $A(1|1|0)$, $B(2|3|3)$ und $C(1|2|4)$.

c) Gegeben sind die Punkte $A(-1|3|5)$, $B(2|3|6)$ und $C(5|5|5)$.

d) Gegeben sind die Punkte $A(2|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|6)$.

e) Gegeben sind die Punkte $A(-3|0|0)$, $B(0|15|0)$ und $C(0|0|\frac{2}{3})$.

Aufgabe 8 (15 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-2)$, $B(6|3|2)$ und $C(8|-1|2)$.

Gegeben sind weiterhin die Punkte

$$P_1(4|2|0), P_2(12|1|6), P_3(10|3|5), P_4(10|0|4) \text{ und } P_5(-2|-1|-6)$$

. Von diesen Punkten weiß man, dass jeder Punkt jeweils eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

- Der Punkt liegt in der Ebene ε_{ABC}, aber nicht auf der Geraden g_{AB}.
- Der Punkt liegt auf der Geraden g_{AB} und in der Ebene ε_{ABC}.
- Der Punkt ist Eckpunkt des Parallelogramms $ABDC$.
- Der Punkt liegt nicht in der Ebene ε_{ABC}.
- Der Punkt liegt auf der Strecke $\overline{AB}$

Ordnen Sie die gegebenen Punkte begründet der jeweiligen Eigenschaft zu.

Aufgabe 9 (3+1 BE)

Geben Sie die Gleichung der Ebene $\varepsilon : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ in Parameterform an. Liegt der Punkt $P(0|8|15)$ in der Ebene?

Aufgabe 10 (3 BE)

Ermitteln Sie die parameterfreie Darstellung der Ebenengleichung

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R}.$$