Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt (24.02.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \circ \vec{b}$; $\vec{a} \circ \vec{c}$ und $\vec{b} \circ \vec{c}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = -4$ $\quad \vec{a} \circ \vec{c} = 0 + 2 + 0 = 2$ $\quad \vec{b} \circ \vec{c} = 0 - 4 + 3 = -1$

d) $|\vec{a} + \vec{b}|$ und $|\vec{a} - \vec{c}|$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{a} - \vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

e) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - 2 \\ -4 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 0 - 6 \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 2 \\ 0 - (-3) \\ -2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (4 BE)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b \\ z_a \cdot x_b - x_a \cdot z_b \\ x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} -x_b \\ -y_b \\ -z_b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_b \cdot z_a - (-z_b) \cdot y_a \\ -z_b \cdot x_a - (-x_b) \cdot z_a \\ -x_b \cdot y_a - (-y_b) \cdot x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_b \cdot z_a + z_b \cdot y_a \\ -z_b \cdot x_a + x_b \cdot z_a \\ -x_b \cdot y_a + y_b \cdot x_a \end{pmatrix}$$

Aus $-y_b \cdot z_a + z_b \cdot y_a$ wird nach Vertauschung der Summanden der Term $z_b \cdot y_a - y_b \cdot z_a$. Tauscht man nun noch die Faktoren, so wird aus $z_b \cdot y_a - y_b \cdot z_a$ der Term $y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b$. Daher gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b \\ z_a \cdot x_b - x_a \cdot z_b \\ x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_b \cdot z_a + z_b \cdot y_a \\ -z_b \cdot x_a + x_b \cdot z_a \\ -x_b \cdot y_a + y_b \cdot x_a \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Aufgabe 3 (3 BE)

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2 + (z_a)^2} = \sqrt{x_a \cdot x_a + y_a \cdot y_a + z_a \cdot z_a}$$

$$\sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}} = \sqrt{x_a \cdot x_a + y_a \cdot y_a + z_a \cdot z_a}$$

Also gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$

Aufgabe 4 (4 BE)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b + x_c \\ y_b + y_c \\ z_b + z_c \end{pmatrix} = x_a \cdot (x_b + x_c) + y_a \cdot (y_b + y_c) + z_a \cdot (z_b + z_c)$$

$$= x_a \cdot x_b + x_a \cdot x_c + y_a \cdot y_b + y_a \cdot y_c + z_a \cdot z_b + z_a \cdot z_c$$

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b + x_a \cdot x_c + y_a \cdot y_c + z_a \cdot z_c$$

Beide Ausdrücke sind gleich. Dazu müssen nur noch verschiedene Summanden umsortiert werden.

Aufgabe 5 (6 BE)

Machen Sie sich eine Übersicht über folgende Vierecksarten und deren Eigenschaften: Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Rhombus/Raute, Trapez und gleichschenkliges Trapez.

Eine sehr gute Übersicht finden Sie beispielsweise hier: `https://de.serlo.org/mathe/geometrie/dreiecke-vierecke-kreise-andere-ebene-figuren/viereck/beziehungen-zwischen-vierecken/haus-vierecke`. Im Unterricht haben wir die grundlegenden Eigenschaften in Ausdrücken der Analytischen Geometrie für jedes Viereck formuliert. Zur Erinnerung:

parallel: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{R}$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, weil $\frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, weil es kein $k \in \mathbb{R}$ gibt

gleich lang: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

gleich lang und parallel: $(\pm 1) \cdot \vec{a} = \vec{b}$

rechtwinklig: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Aufgabe 6 (3 + 6 BE + 2 Zusatzpunkte)

Gegeben ist eine Pyramide $ABCS$. Ihre Grundfläche ist das Dreieck ABC. Die Punkte haben in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten

$$A(6|2|1), B(6|8|1), C(2|5|3) \text{ und } S(8|5|10)$$

a) Stellen Sie die Pyramide $ABCS$ in einem Koordinatensystem dar.

Eigene Darstellung

b) Prüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
  $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 18 \neq 0, \qquad \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = -18 \neq 0, \qquad \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC} = 11 \neq 0$
  $\Rightarrow \triangle ABC$ ist nicht rechtwinklig.
- Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.
  $|\overrightarrow{AB}| = 6$ LE, $\qquad |\overrightarrow{BC}| = 29$ LE, $\qquad |\overrightarrow{AC}| = 29$ LE
  Das $\triangle ABC$ ist gleichschenklig, da $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$ ist.
- Der Punkt $P(0|6,5|4)$ liegt auf der Dreiecksseite $\overline{AC}$.
  $$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4,5 \\ 3 \end{pmatrix} = 1,5 \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ daher muss der Punkt } P \text{ außerhalb der Seite } \overline{AC} \text{ liegen.}$$

c) Ergänzen Sie einen Punkt D, so dass $ABDC$ ein Parallelogramm bildet.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad D(2|11|3)$$

d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

$$V = \frac{1}{6} \cdot det \left(\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC} \ \overrightarrow{AS} \right) = \frac{1}{6} \cdot det \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (0 + 0 + 24 - 0 - 0 - (-216))$$
$$= \frac{1}{6} \cdot 240 = 40 \text{ VE}$$

Aufgabe 7 (6 BE + 2 Zusatzpunkte)

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix}2\\4\\-8\end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

Wählen Sie sich von den gegebenen Vektoren nach eigenem Ermessen welche aus und erklären Sie die Begriffe *kollinear*, *komplanar* und *linear unabhängig*.

Für Zusatzpunkte: Stellen Sie diese Begriffe mithilfe einer graphischen Skizze dar.

Skizze und Erklärung siehe Sitzung vom 02.02.2022
Kollinear sind z.B. $\vec{b}$ und $\vec{h}$, weil $-2 \cdot \vec{b} = \vec{h}$
Komplanar ist z.B. $\vec{a}$, $\vec{c}$ und $\vec{g}$, weil $2 \cdot \vec{a} + 8 \cdot \vec{c} = \vec{g}$ gilt.
Linear unabhängig sind z.B. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, weil $\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ nur die Lösung $\lambda = \mu = \kappa = 0$ hat.

Aufgabe 8 (3 BE)

Begründen Sie, dass das Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen der Determinante verändert.

Führt man die Definition der Determinante auf das Spatprodukt zurück, so gilt:

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

Weiterhin ist der Wert der oben angegebenen Determinante:

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

Der Wert der negativen Determinante ist dementsprechend:

$$-det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = -a_1b_2c_3 - b_1c_2a_3 - c_1a_2b_3 + a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1$$

Hier wurden jetzt die Summanden farblich markiert, damit diese nachher nur noch verglichen werden müssen.

Vertauscht man die ersten beiden Spalten, dann ist der Vorzeichenwechsel offensichtlich und wurde in Aufgabe 2 nachgewiesen, weil $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = - \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ gilt. Es muss also noch die Vertauschung von Spalte a und c sowie b und c berechnet und nachgewiesen werden.

$$det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{pmatrix} = a_1c_2b_3 + c_1b_2a_3 + b_1a_2c_3 - a_3c_2b_1 - c_3b_2a_1 - b_3a_2c_1$$

$$det \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{pmatrix} = c_1b_2a_3 + b_1a_2c_3 + a_1c_2b_3 - c_3b_2a_1 - b_3a_2c_1 - a_3c_2b_1$$

Daher verändert das Vertauschen zweier Spalten einer Determinante das Vorzeichen.

Zusatzaufgabe für die mathematisch Interessierten

Weisen Sie folgende Identität für alle $w, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mithilfe der Norm- bzw. Skalarproduktaxiome nach:

- $\langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z\rangle = \lambda \cdot \langle x, z\rangle + \mu \cdot \langle y, z\rangle$

  $\langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z\rangle \overset{(S2)}{=} \langle \lambda \cdot x, z\rangle + \langle \mu \cdot y, z\rangle \overset{(S1)}{=} \lambda \cdot \langle x, z\rangle + \mu \cdot \langle y, z\rangle$

- $\langle x, \lambda \cdot y + \mu \cdot z\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle + \mu \cdot \langle x, z\rangle$

  $\langle x, \lambda \cdot y + \mu \cdot z\rangle \overset{(S3)}{=} \langle \lambda \cdot y + \mu \cdot z, x\rangle \overset{\text{siehe oben}}{=} \lambda \cdot \langle y, x\rangle + \mu \cdot \langle z, x\rangle \overset{(S3)}{=} \lambda \cdot \langle x, y\rangle + \mu \cdot \langle x, z\rangle$

- $\langle w + x, y + z\rangle = \langle w, y\rangle + \langle w, z\rangle + \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

  $\langle w + x, y + z\rangle \overset{(S2)}{=} \langle w, y + z\rangle + \langle x, y + z\rangle \overset{(S3)}{=} \langle y + z, w\rangle + \langle y + z, x\rangle$

  $\overset{(S2)}{=} \langle y, w\rangle + \langle z, w\rangle + \langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle \overset{(S3)}{=} \langle w, y\rangle + \langle w, z\rangle + \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

- $\langle -x, -y\rangle = \langle x, y\rangle$

  $\langle -x, -y\rangle \overset{(S1)}{=} -1 \cdot \langle x, -y\rangle \overset{(S3}{=} -1 \cdot \langle -y, x\rangle \overset{(S1)}{=} -1 \cdot (-1) \cdot \langle y, x\rangle \overset{(S3)}{=} 1 \cdot \langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$

- $\langle -x, y\rangle = \langle x, -y\rangle$

  $\langle -x, y\rangle \overset{(S1)}{=} -1 \cdot \langle x, y\rangle \overset{(S3)}{=} -1 \cdot \langle y, x\rangle \overset{(S1)}{=} \langle -y, x\rangle \overset{(S3)}{=} \langle x, -y\rangle$

- $\langle x, 0\rangle = 0$

  $\langle x, 0\rangle \overset{(S3)}{=} \langle 0, x\rangle \overset{(S1)}{=} 0 \cdot \langle 0, x\rangle = 0$

- $\|-x\| = \|x\|$

  $\|-x\| = \|-1 \cdot x\| \overset{(N3)}{=} \underbrace{|-1|}_{=1} \cdot \|x\| = \|x\|$

- $\|x - z\| \leqq \|x - y\| + \|y - z\|$

  $|x - z\| = \|x \underbrace{-y + y}_{=0} - z\| \overset{N4}{\leqq} \|x - y\| + \|y - z\|$

- $\|\lambda \cdot x + \mu \cdot y\| \leqq |\lambda| \cdot \|x\| + |\mu| \cdot \|y\|$

  $\|\lambda \cdot x + \mu \cdot y\| \overset{(N4)}{\leqq} \|\lambda \cdot x\| + \|\mu \cdot y\| \overset{(N3)}{=} |\lambda| \cdot \|x\| + |\mu| \cdot \|y\|$