Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt (24.02.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

b) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

c) $\vec{a} \circ \vec{b}$; $\vec{a} \circ \vec{c}$ und $\vec{b} \circ \vec{c}$

d) $|\vec{a} + \vec{b}|$ und $|\vec{a} - \vec{c}|$

e) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$

Aufgabe 2 (4 BE)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Aufgabe 3 (3 BE)

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

Aufgabe 4 (4 BE)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

Aufgabe 5 (6 BE)

Machen Sie sich eine Übersicht über folgende Vierecksarten und deren Eigenschaften: Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Rhombus/Raute, Trapez und gleichschenkliges Trapez.

Aufgabe 6 (3 + 6 BE + 2 Zusatzpunkte)

Gegeben ist eine Pyramide $ABCS$. Ihre Grundfläche ist das Dreieck ABC. Die Punkte haben in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten

$$A(6|2|1), B(6|8|1), C(2|5|3) \text{ und } S(8|5|10)$$

a) Stellen Sie die Pyramide $ABCS$ in einem Koordinatensystem dar.

b) Prüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

- Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
- Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.
- Der Punkt $P(0|6,5|4)$ liegt auf der Dreiecksseite $\overline{AC}$.

c) Ergänzen Sie einen Punkt D, so dass $ABDC$ ein Parallelogramm bildet.

d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Aufgabe 7 (6 BE + 2 Zusatzpunkte)

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix}2\\4\\-8\end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

Wählen Sie sich von den gegebenen Vektoren nach eigenem Ermessen welche aus und erklären Sie die Begriffe *kollinear*, *komplanar* und *linear unabhängig*.

Für Zusatzpunkte: Stellen Sie diese Begriffe mithilfe einer graphischen Skizze dar.

Aufgabe 8 (3 BE)

Begründen Sie, dass das Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen der Determinante verändert.

Zusatzaufgabe für die mathematisch Interessierten

Weisen Sie folgende Identität für alle $w, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mithilfe der Norm- bzw. Skalarproduktaxiome nach:

- $\langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z \rangle = \lambda \cdot \langle x, z \rangle + \mu \cdot \langle y, z \rangle$
- $\langle x, \lambda \cdot y + \mu \cdot z \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle + \mu \cdot \langle x, z \rangle$
- $\langle w + x, y + z \rangle = \langle w, y \rangle + \langle w, z \rangle + \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle -x, -y \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\langle -x, y \rangle = \langle x, -y \rangle$
- $\langle x, 0 \rangle = 0$
- $\|-x\| = \|x\|$
- $\|x - z\| \leqq \|x - y\| + \|y - z\|$
- $\|\lambda \cdot x + \mu \cdot y\| \leqq |\lambda| \cdot \|x\| + |\mu| \cdot \|y\|$