Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren (02.02.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (4 BE)

Überprüfen Sie, ob die Vektoren voneinander linear abhängig oder unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ -11 \end{pmatrix}$ linear abhängig

Aufgabe 2 (6 BE)

Untersuchen Sie, ob es Werte für den Parameter t gibt, sodass die drei Vektoren voneinander linear abhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 10 \end{pmatrix}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 8, a = 4, b = -2$$

Für $t = 8$ sind die Vektoren linear abhängig.

b) $\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 0, a = -1, b = -4 \text{ oder } t = 3, a = 5, b = 2$$

Für $t = 0$ oder $t = 3$ sind die Vektoren linear abhängig.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ t+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ t+3 \end{pmatrix}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ t+3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -1, b = 2$$

Das heißt also, die Vektoren sind immer linear abhängig, egal was für t eingesetzt wird. Damit ist $t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3 (2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|0|0)$, $B(6|2|1)$ und $C(8|-1|3)$.
Zeigen Sie, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wenn beide linear abhängig sind, dann sind sie parallel und durch den gemeinsamen Ausgangspunkt A sogar auf einer Geraden. Sind sie unabhängig, bilden sie ein Dreieck und keine Gerade.

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \rightarrow \quad a = 2 \\ \rightarrow \quad a = -0,5 \\ \rightarrow \quad a = 3 \end{array}\right\} a \text{ ist nicht eindeutig } \rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ und } \overrightarrow{AC} \text{ sind linear unabhängig}$$

Aufgabe 4 (4 BE)

Gegeben sind die Punkte $R(-2|-1|0)$ und $S(4|2|0)$. Geben Sie einen Punkt T so an, dass

a) RST ein Dreieck bildet.

b) RST kein Dreieck bildet.

Begründen Sie Ihre Angabe.

$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zu dem Vektor $\overrightarrow{RS}$ wird in Aufgabe a) ein linear unabhängiger Vektor gesucht und in Aufgabe b) ein linear abhängiger Vektor gesucht. Dieser wird dann an den Ortsvektor von R, also $\overrightarrow{OR}$, addiert und so erhält man den Punkt T.

a) Ein möglicher Vektor wäre $\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann wäre $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(4|-4|0)$

b) Eine Möglichkeit T zu bilden, wäre beispielsweise $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OR} + 2 \cdot \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann würde $T(10|5|0)$ auch auf einer Geraden mit R und S liegen, weil $\overrightarrow{OT}$ eine Linearkombination von $\overrightarrow{OR}$ und $\overrightarrow{RS}$ ist.