Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (24.01.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+6 \\ 1-3+8 \\ 3+5-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0+6 \\ 1+3+8 \\ 3-5-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$

c) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -2+0-6 \\ -1-3-8 \\ -3+5+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix}$

d) $3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 35 \end{pmatrix}$

e) $2 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b} - \frac{5}{2} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -30 \\ 66 \end{pmatrix}$

f) $-\frac{5}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{4}{3} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{15}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{3} \\ \frac{32}{3} \\ -\frac{64}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ 8 \\ -\frac{74}{3} \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (2 + 3 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide $ABCDS$ gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7.

a) Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

$A(0|0|0), B(5|0|0), C(5|5|0), D(0|5|0), \qquad S(2,5|2,5|7)$

Den Punkt S bekommt man durch den Mittelpunkt von $ABCD$ ermittelt.

b) Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Es gilt $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

Variante 1: Die Höhe wird 4 Mal so hoch gewählt: $S(2,5|2,5|28)$, dann ist das Volumen auch 4 Mal so groß.

Variante 2: Beispielsweise $A(0|0|0)$, $B(20|0|0)$, $C(20|5|0)$ und $D(0|5|0)$, dann wären die parallelen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ viermal so lang, aber $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ wären weiterhin 5 LE lang.

Variante 3: Alle Seitenlängen werden verdoppelt: $A(0|0|0), B(10|0|0), C(10|10|0)$ und $D(0|10|0)$, dann würde sich A_G auch vervierfachen.

Wichtig ist bei Variante 2 und Variante 3, dass S weiterhin die x_3-Koordinate 7 beibehält, damit sich die Höhe der Pyramide nicht ändert.

Es sind auf jeden Fall noch mehr Varianten möglich.

Aufgabe 3 (3 BE)

Gegeben ist der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ole und Emma berechnen die Länge des Vektors.

Ole: $|\vec{x}| = \sqrt{2-2+5} = \sqrt{5}$ LE

Emma: $|\vec{x}| = \sqrt{2^2 - 2^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$ LE.

Begründen Sie, welche Fehler gemacht wurden und geben Sie den korrekten Rechenweg an.

Ole hat die einzelnen Komponenten nicht quadriert. Emma hat die -2 nicht eingeklammert.

$|\vec{x}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{33}$ LE

Aufgabe 4 (2 BE)

Bestimmen Sie den Einheitsvektor $\vec{a_0}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 0^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$$\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob das $\triangle ABC$ mit $A(0|3|0)$, $B(2|4|6)$ und $C(-1|-2|-3)$ gleichschenklig ist.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{41} \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35} \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (-9)^2} = \sqrt{126} \text{ LE}$$

Keine zwei Seiten sind gleich lang, also ist das Dreieck ABC nicht gleichschenklig.

Aufgabe 6 (4 BE)

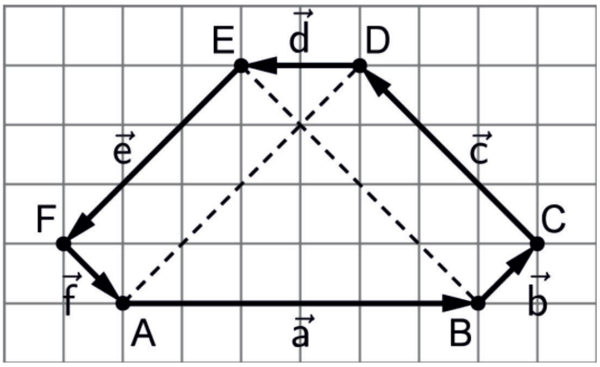
Vereinfachen Sie die Vektorsummen soweit wie möglich. Fertigen Sie dazu jeweils eine Skizze an.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ c) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SR} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{RP} - (\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$

Aufgabe 7 (2 + 1 + 2 BE)

Im abgebildeten Sechseck $ABCDEF$ sind jeweils zwei Seiten parallel zueinander.



a) Stellen Sie die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ jeweils mithilfe der Eckpunkte des Sechsecks dar.

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{BE} \qquad \vec{y} = \vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{FE}$$

b) Stellen Sie nun den Vektor $\overrightarrow{FB}$ mithilfe von genau drei der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dar.

$\overrightarrow{FB} = \vec{f} - \vec{e} - \vec{c}$

c) Der Punkt A hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -4$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ wird mit M bezeichnet. Der Punkt $K(2|0|8)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$. Ermitteln Sie die Koordinaten von B.

Aus dem Text kann entnommen werden, dass $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 4 \cdot \overrightarrow{AK}$ gilt.
(Eine Skizze hilft hier.)

$$\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 44 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad B(-10|-6|44)$$

Aufgabe 8 (3+3+3+3 BE)

Bei einer Verschiebung wird der Punkt A auf den Punkt B abgebildet.
Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass $|\overrightarrow{AB}| = d$ gilt.

a) $A(5|2|5); B(6|4|b_3); d = 3$ $b_3 = 7$ oder $b_3 = 3$

b) $A(-6|a_2|-4); B(-2|3|-4); d = 5$ $a_2 = 0$ oder $a_2 = 6$

c) $A(6|3|-5); B(b_1|2|-2); d = 4$ $b_1 = 6 + \sqrt{6}$ oder $b_1 = 6 - \sqrt{6}$

d) $A(-10|21|0); B(4|b_2|5); d = 15$ $b_2 = 23$ oder $b_2 = 19$

Aufgabe 9 (3+3 BE)

a) Der Punkt $P(1|-3|8)$ wird an der x_1x_2-Ebene gespiegelt.
Bestimmen Sie die Koordinaten seines Bildpunktes P' und berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{PP'}$.

P wird auf den Bildpunkt $P'(1|-3|-8)$ abgebildet. Es gilt:

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} \text{ und } |\overrightarrow{PP'}| = 16 \text{ LE}$$

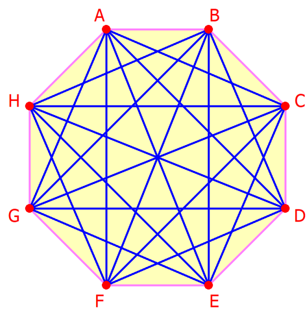
b) Der Punkt $A(-4|5|9)$ wird in die x_1x_2-Ebene projiziert.
Bestimmen Sie die Koordinaten seines Bildpunktes A' und berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{AA'}$.

A wird auf den Bildpunkt $A'(-4|5|0)$ abgebildet. Es gilt:

$$\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ und } |\overrightarrow{AA'}| = 9 \text{ LE}$$

Aufgabe 10 (4+4+3 BE)

Hier sehen Sie ein Achteck $ABCDEFGH$ mit allen Verbindungen zwischen den Eckpunkten.



a) Geben Sie alle identischen Vektoren an. Z.B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ und $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EF}$.

Gegenüberliegende Seitenbegrenzungen: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GF}; \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FG}; \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HG}; \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{GH};$
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AH}; \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{HA}$

Querverbindungen (eine Ecke dazwischen): $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{FD}; \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{DF}$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GE}; \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EG}; \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CE}; \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{EC}$

Querverbindungen (zwei Ecken dazwischen): $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE}; \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EB}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HE}; \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EH}$
$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CF}; \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{FC}; \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DG}; \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{GD}$

b) Geben Sie in einer Liste an, welche gleich langen Vektoren es gibt.

Alle identischen Vektoren aus einer Kategorie aus Aufgabe a) sind natürlich auch gleich lang. Dazu kommt, dass die Verbindung von zwei gegenüberliegenden Punkten auch gleich lang ist:

$$|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{BF}| = |\overrightarrow{CG}| = |\overrightarrow{DH}| = |\overrightarrow{EA}| = |\overrightarrow{FB}| = |\overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{HD}|$$

c) Beschreiben Sie zueinander vielfache, jedoch nicht identische Vektoren.

Alle zueinander parallelen, aber nicht identischen Vektoren sind Vielfache voneinander, z.B. $\overrightarrow{GH}$ und $\overrightarrow{FA}$ bzw. $\overrightarrow{AF}$ (nur anderes Vorzeichen, trotzdem Vielfaches).

Aufgabe 11 (3+3 BE)

Der Startpunkt S eines Heißluftballons kann in einem Koordinatensystem (mit der Einheit Meter) durch die Koordinaten $S(225|-349|114)$ beschrieben werden. Er steigt in den ersten fünf Minuten bei nahezu konstanten Windverhältnissen um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 150 \\ 600 \\ 1.200 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T, in dem sich der Ballon nach 5 min und des Punktes R, in dem sich der Ballon nach 2 min befindet.

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 225 \\ -349 \\ 114 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 150 \\ 600 \\ 1.200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 251 \\ 1.314 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad T(375|251|1.314)$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} + \tfrac{2}{5} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 225 \\ -349 \\ 114 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 600 \\ 1.200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 285 \\ -109 \\ 594 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad R(285|-109|594)$$

b) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Ballons in dieser Zeit.

Weg von 5 Minuten: $|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 150 \\ 600 \\ 1.200 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{150^2 + 600^2 + 1.200^2} = 1.350 \text{ m}$

In einer Stunde sind es also 16.200 m, was 16,2 km entspricht.

Also hat der Ballon eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 16,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 12 (3+4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-3|-2|5), B(2|-3|3)$ und $C_k(k|-3|5)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie für $k = -10$ den Umfang des Dreiecks ABC_{-10}.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{30} \text{ LE} \qquad |\overrightarrow{BC_{-10}}| = \left| \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{148} \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AC_{-10}}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{50} \text{ LE} \qquad \rightarrow \qquad U \approx 27,71 \text{ LE}$$

b) Untersuchen Sie, ob es Werte von k gibt, für welche das Dreieck ABC_k gleichschenklig ist. Ist auch der Spezialfall gleichseitig möglich?

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC_k}| \Leftrightarrow \sqrt{30} = \sqrt{k^2 + 6k + 10} \quad \rightarrow \quad k_1 = -3 + \sqrt{29}$ und $k_2 = -3 - \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC_k}| \Leftrightarrow \sqrt{30} = \sqrt{k^2 - 4k + 8} \quad \rightarrow \quad k_3 = 2 + \sqrt{26}$ und $k_4 = 2 - \sqrt{26}$

$|\overrightarrow{AC_k}| = |\overrightarrow{BC_k}| \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 6k + 10} = \sqrt{k^2 - 4k + 8} \quad \rightarrow \quad k_5 = -\frac{1}{5}$

Für diese Werte k_1 bis k_5 ist ein gleichschenkliges Dreieck möglich.

Da es kein gemeinsames k für alle drei Seiten gibt, kann das Dreieck nie gleichseitig sein.

Aufgabe 13 (4+6 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|6|5), B(-1|6|5)$ und $C(-1|3|9)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ist. Bestimmen Sie einen Punkt D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

Es ist $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25}$ und $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{50}$. Daher ist das $\triangle ABC$ gleichschenklig.

Rechtwinklig ist es, weil der Satz des Pythagoras gilt: $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$.

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ Für $D(4|3|9)$ ist das Viereck $ABCD$ ein Quadrat.

b) Das Quadrat $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(-2|2|5)$. Untersuchen Sie, ob die Seitenkanten der Pyramide alle gleich lang sind.

Es gilt: $|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{52}, |\overrightarrow{BS}| = \sqrt{17}; |\overrightarrow{CS}| = \sqrt{18}; |\overrightarrow{DS}| = \sqrt{53}$. Die Seitenkanten der Pyramide haben alle eine unterschiedliche Länge.

Stellen Sie die Pyramide im Schrägbild in einem kartesischen Koordinatensystem dar.