Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (24.01.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ c) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

d) $3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c}$ e) $2 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b} - \frac{5}{2} \cdot \vec{c}$ f) $-\frac{5}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{4}{3} \cdot \vec{c}$

Aufgabe 2 (2 + 3 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide $ABCDS$ gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7.

a) Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

b) Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 3 (3 BE)

Gegeben ist der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ole und Emma berechnen die Länge des Vektors.

Ole: $|\vec{x}| = \sqrt{2 - 2 + 5} = \sqrt{5}$ LE Emma: $|\vec{x}| = \sqrt{2^2 - 2^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$ LE.

Begründen Sie, welche Fehler gemacht wurden und geben Sie den korrekten Rechenweg an.

Aufgabe 4 (2 BE)

Bestimmen Sie den Einheitsvektor $\vec{a_0}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob das $\triangle ABC$ mit $A(0|3|0)$, $B(2|4|6)$ und $C(-1|-2|-3)$ gleichschenklig ist.

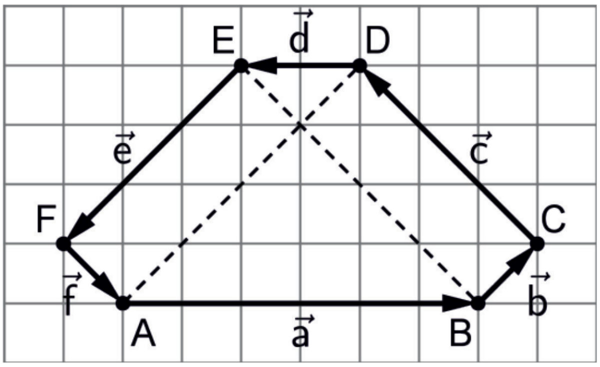
Aufgabe 6 (4 BE)

Vereinfachen Sie die Vektorsummen soweit wie möglich. Fertigen Sie dazu jeweils eine Skizze an.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SR}$ d) $\overrightarrow{RP} - (\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QS}$

Aufgabe 7 (2 + 1 + 2 BE)

Im abgebildeten Sechseck $ABCDEF$ sind jeweils zwei Seiten parallel zueinander.



a) Stellen Sie die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ jeweils mithilfe der Eckpunkte des Sechsecks dar.

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \qquad\qquad \vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$$

b) Stellen Sie nun den Vektor $\overrightarrow{FB}$ mithilfe von genau drei der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dar.

c) Der Punkt A hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -4$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ wird mit M bezeichnet. Der Punkt $K(2|0|8)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$. Ermitteln Sie die Koordinaten von B.

Aufgabe 8 (3+3+3+3 BE)

Bei einer Verschiebung wird der Punkt A auf den Punkt B abgebildet.
Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass $|\overrightarrow{AB}| = d$ gilt.

a) $A(5|2|5); B(6|4|b_3); d = 3$

b) $A(-6|a_2|-4); B(-2|3|-4); d = 5$

c) $A(6|3|-5); B(b_1|2|-2); d = 4$

d) $A(-10|21|0); B(4|b_2|5); d = 15$

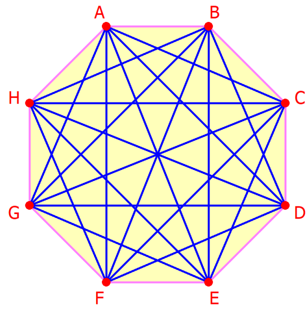
Aufgabe 9 (3+3 BE)

a) Der Punkt $P(1|-3|8)$ wird an der x_1x_2-Ebene gespiegelt.
Bestimmen Sie die Koordinaten seines Bildpunktes P' und berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{PP'}$.

b) Der Punkt $A(-4|5|9)$ wird in die x_1x_2-Ebene projiziert.
Bestimmen Sie die Koordinaten seines Bildpunktes A' und berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{AA'}$.

Aufgabe 10 (4+4+3 BE)

Hier sehen Sie ein Achteck $ABCDEFGH$ mit allen Verbindungen zwischen den Eckpunkten.



a) Geben Sie alle identischen Vektoren an. Z.B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ und $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EF}$.

b) Geben Sie in einer Liste an, welche gleich langen Vektoren es gibt.

c) Beschreiben Sie zueinander vielfache, jedoch nicht identische Vektoren.

Aufgabe 11 (3+3 BE)

Der Startpunkt S eines Heißluftballons kann in einem Koordinatensystem (mit der Einheit Meter) durch die Koordinaten $S(225|-349|114)$ beschrieben werden. Er steigt in den ersten fünf Minuten bei nahezu konstanten Windverhältnissen um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 150 \\ 600 \\ 1.200 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T, in dem sich der Ballon nach 5 min und des Punktes R, in dem sich der Ballon nach 2 min befindet.

b) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Ballons in dieser Zeit.

Aufgabe 12 (3+4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-3|-2|5), B(2|-3|3)$ und $C_k(k|-3|5)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie für $k = -10$ den Umfang des Dreiecks ABC_{-10}.

b) Untersuchen Sie, ob es Werte von k gibt, für welche das Dreieck ABC_k gleichschenklig ist. Ist auch der Spezialfall gleichseitig möglich?

Aufgabe 13 (4+6 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|6|5), B(-1|6|5)$ und $C(-1|3|9)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ist. Bestimmen Sie einen Punkt D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

b) Das Quadrat $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(-2|2|5)$. Untersuchen Sie, ob die Seitenkanten der Pyramide alle gleich lang sind.
Stellen Sie die Pyramide im Schrägbild in einem kartesischen Koordinatensystem dar.