Punkte und Objekte im $\mathbb{R}^3$ (19.01.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 + 1 + 6 BE)

Gegeben sei das Dreieck ABC mit seinen Eckpunkten $A(6|-5|4)$, $B(5|1|4)$ und $C(-3|13|6)$.

a) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ 1-(-5) \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3-5 \\ 13-1 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt S des Dreiecks.

$$S\left(\frac{6+5-3}{3}\middle|\frac{-5+1+13}{3}\middle|\frac{4+4+6}{3}\right) \quad \to \quad S\left(\frac{8}{3}\middle|\,3\,\middle|\frac{14}{3}\right)$$

c) Ermitteln Sie die vektorielle Beschreibung der Seitenhalbierenden $S_{\overline{AB}}$, $S_{\overline{BC}}$ und $S_{\overline{AC}}$.

Die Seitenhalbierenden sind die Verbindungen der Mittelpunkte der Seiten und den gegenüberliegenden Eckpunkten.

$$M_{\overline{AB}}(5,5|-2|4) \quad \to \quad S_{\overline{AB}} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_{\overline{AB}}} = \begin{pmatrix} -3-5,5 \\ 13-(-2) \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{\overline{BC}}(1|7|5) \quad \to \quad S_{\overline{BC}} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM_{\overline{BC}}} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ -5-7 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\overline{AC}}(1,5|4|5) \quad \to \quad S_{\overline{AC}} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_{\overline{AC}}} = \begin{pmatrix} -5-1,5 \\ 1-4 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (1 + 1 + 1 + 1 + 5 BE)

Berechnen Sie die Mittelpunkte der gegebenen Objekte.

a) Strecke $\overline{AB}$ mit

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$M\left(\frac{2+0}{2}\middle|\frac{3+8}{2}\middle|\frac{4+15}{2}\right) \quad \to \quad M(1|5,5|9,5)$$

b) Dreieck RST mit $R(1|2|3), S(2|3|5)$ und $T(2|4|8)$

$$M\left(\frac{1+2+2}{3}\middle|\frac{2+3+4}{3}\middle|\frac{3+5+8}{3}\right) \quad \to \quad M\left(\tfrac{5}{3}\;\middle|\;3\;\middle|\;\tfrac{16}{3}\right)$$

c) Viereck $EFGH$ mit $E(-1|1|-1), F(-2|4|-8), G(-3|9|-27)$ und $H(0|1|0)$

$$M\left(\frac{-1-2-3+0}{4}\middle|\frac{1+4+9+1}{4}\middle|\frac{-1-8-27+0}{4}\right) \to M(-1,5|3,75|-9)$$

d) Fünfeck $OPQRS$ mit

O (Koordinatenursprung), $P(5|5|5), Q(3|6|7), R(0|3|8)$ und $S(-2|-3|4)$

$M\left(\frac{0+5+3+0-2}{5}\middle|\frac{0+5+6+3-3}{5}\middle|\frac{0+5+7+8+4}{5}\right) \rightarrow M(1,2|2,2|4,8)$

e) Quader $ABCDEFGH$ mit Grundfläche $ABCD$ und Deckfläche $DEFG$

A ist im Koordinatenursprung, $B(4|0|0)$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E(0|0|8)$

Zuerst müssen noch die fehlenden Koordinaten ermittelt werden.
Der Punkt D muss auch $x_3 = 0$ haben, da A, B und C in einer Ebene liegen (gleiche x_3-Koordinate).
Damit die Grundfläche ein Rechteck ist, muss D die Koordinaten $D(0|7|0)$ haben.

Der Punkt E liegt 8 LE über A, so liegen also auch alle anderen Punkte jeweils 8 LE über den entsprechenden Punkten
$\rightarrow F(4|0|8), G(4|7|8)$ und $H(0|7|8)$

Nun wird der Mittelpunkt aus den 8 Punkten gebildet.

$M\left(\frac{16}{8}\middle|\frac{28}{8}\middle|\frac{32}{8}\right) \qquad \rightarrow \qquad M(2|3,5|4)$

Aufgabe 3 (4 BE)

Stellen Sie den Quader $ABCDEFGH$ aus Aufgabe 2e) in einem geeigneten kartesischen Koordinatensystem dar.

Die zu verbindenden Punkte sind:

$A(0|0|0), B(4|0|0), C(4|7|0), D(0|7|0), E(0|0|8), F(4|0|8), G(4|7|8), H(0|7|8)$

Aufgabe 4 (3 + 2 + 1 BE)

Stellen Sie einen Würfel mit Kantenlänge 4 LE in einem kartesischen Koordinatensystem räumlich dar. Bestimmen Sie außerdem die Mittelpunkte der Seitenflächen und den Schwerpunkt des Würfels.

Darzustellen sind z.B. die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|4|0)$, $D(0|4|0)$, $E(0|0|4)$, $F(4|0|4)$, $G(4|4|4)$ und $H(0|4|4)$. (3 BE)

$M_{ABFE}(2|0|2)$, $M_{ABCD}(2|2|0)$, $M_{BCGF}(4|2|2)$, $M_{CDHG}(2|4|2)$, $M_{ADFE}(0|2|2)$, $M_{EFGH}(2|2|4)$ (2 BE)

$S(2|2|2)$ (1 BE)

Aufgabe 5 (2 BE)

Seien die Punkte $A(x_A|y_A|z_A)$ und $B(x_B|y_B|z_B)$ gegeben. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix}$

Außerdem ist $-\overrightarrow{BA} = -\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_A - x_B) \\ -(y_A - y_B) \\ -(z_A - z_B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_A + x_B \\ -y_A + y_B \\ -z_A + z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$

Also gilt: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$