Extremwertprobleme (16.01.2020)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Aus einem 36 cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Bestimmen Sie die Kantenlängen unter der Bedingung, dass das Volumen maximal wird.

Extremalbedingung: $V(a,b) = a^2 \cdot b$ soll maximiert werden.

Nebenbedingung: $8a + 4b = 36$ (Alle Kanten zusammen sind 36 cm lang.)
$4b = 36 - 8b \Leftrightarrow b = 9 - 2a$

Zielfunktion: $V(a) = a^2 \cdot (9 - 2a) = 9a^2 - 2a^3$

Hochpunkt der Zielfunktion graphisch bestimmen ergibt: $H(3|27)$, das heißt für $a = 3$ cm hat der Quader ein Volumen von 27cm^3.

Berechnung von b: $b = 9 - 2a \overset{a=3}{\Rightarrow} b = 9 - 6 = 3$, somit hat b auch die Kantenlänge 3cm und somit ist der Quader ein Würfel mit Kantenlänge 3 cm.

Aufgabe 2 (6 BE)

Ein rechteckiges Plakat hat eine Fläche von 35 dm^2. Es wird so bedruckt, dass die Ränder an den Seiten jeweils 4 cm, oben und unten jeweils 5 cm betragen. Bestimmen Sie die Maße des Plakates mit der größten bedruckbaren Fläche.

Vorbetrachtung: 35 dm^2 = 3.500 cm^2

Extremalbedingung: $A(a,b) = (a - 8) \cdot (b - 10)$ soll maximal werden.

Nebenbedingung: $a \cdot b = 3.500 \Leftrightarrow a = \frac{3.500}{b}$

Zielfunktion: $A(b) = \left(\frac{3.500}{b} - 8\right) \cdot (b - 10) = 3.500 - 8b - \frac{3.500}{b} + 80 = -8b - \frac{3.500}{b} + 3580$

Zielfunktion mithilfe des CAS ableiten: $A'(b) = -8 + \frac{3500}{x^2}$ $\qquad A''(b) = -\frac{7000}{b^3}$

Hochpunkt berechnen: $A'(b) = 0 \rightarrow b_1 = -\frac{5\cdot\sqrt{70}}{2}$ (entfällt, da < 0) und $b_2 = \frac{5\cdot\sqrt{70}}{2}$

hinreichende Bedingung: $A''\left(\frac{5\cdot\sqrt{70}}{2}\right) = -40 \cdot \sqrt{70} < 0 \rightarrow$ bei $b = \frac{5\cdot\sqrt{70}}{2}$ ist ein lokales Maximum.

Hochpunktkoordinaten: $A\left(\frac{5\cdot\sqrt{70}}{2}\right) = 3580 - 40 \cdot \sqrt{70} \approx 3.245,34 \rightarrow H(20,92|3.245,34)$

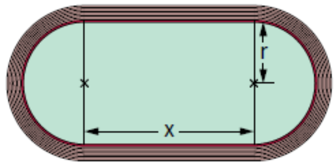
Seitenlänge von a: $a = \dfrac{3.500}{b} \overset{b\approx 20,92}{\Rightarrow} a \approx 167,33$

Das Plakat hat eine Breite von ca. 167,33 cm und eine Höhe von 20,92 cm. Das sieht vielleicht etwas seltsam aus, weil es eher ein Streifen ist, aber so ist es nunmal bei dem maximalen Flächeninhalt.

Aufgabe 3 (6 + 2 BE)

Eine 400-m-Laufbahn in einem Sportstadion besteht aus zwei Halbkreisen, die durch zwei parallele Strecken verbunden sind.

a) Wie müssen der Radius r der Halbkreise und die Länge x der parallelen Strecken gewählt werden, damit die mittlere Rechteckfläche einen maximalen Flächeninhalt hat?



b) Recherchieren Sie, ob Stadien in der Nähe Ihres Wohnortes diese Abmessungen besitzen.

Abbildung 1: Elemente der Mathematik. Sachsen 11, S. 136

Extremalbedingung: $A(r,x) = 2r \cdot x$ soll maximal werden.

Nebenbedingung: $2x + 2\pi r = 400 \Leftrightarrow x + \pi r = 200 \Leftrightarrow x = 200 - \pi r$

Zielfunktion: $A(r) = 2r \cdot (200 - \pi r) = 400r - 2\pi r^2$

Zielfunktion ableiten: $A'(r) = 400 - 4\pi r$ $\qquad A''(r) = -4\pi < 0 \rightarrow$ es liegt ein Maximum vor.

Hochpunkt berechnen: $A'(r) = 0 \rightarrow r = \frac{100}{\pi}$

Hochpunktkoordinaten: $A\left(\frac{100}{\pi}\right) = \frac{20.000}{\pi} \approx 6.366,20 \rightarrow H(31,83|6.366,20)$

Seitenlänge von x: $x = 200 - \pi r \overset{r=\frac{100}{\pi}}{\Rightarrow} x = 100$

Bei einer Abmessung von 100 m Breite und ca. 63,66 m Höhe hat das mittlere Rechteck eine maximale Fläche von ca. 6.366,20 m^2.

Aufgabe b) eigene Recherche.

Aufgabe 4 (6 BE)

Ein Gewölbegang hat einen Querschnitt von der Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang des Querschnitts ist durch $U = 10$ m fest vorgegeben. Wie muss das Gewölbe gestaltet werden, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird?

Zielfunktion: $Q = 2 \cdot r \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$
Nebenbedingung: $2r + 2a + \pi \cdot r = 10$
$Q(r) = 10r - \left(2 + \frac{1}{2} \cdot \pi\right) \cdot r^2$
$r = \frac{10}{4+\pi} \approx 1,40 \text{ m} \approx a$

Aufgabe 5 (6 BE)

Von einer Kaffeesorte werden bei einem Preis von 20 € für 1 kg im Monat 10.000 kg verkauft. Eine Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissenkung von 0,02 € je kg zu einer Absatzsteigerung von jeweils 100 kg im Monat führen würde. Bei welchem Verkaufspreis wäre der Gewinn maximal, wenn für 1 kg Kaffee der Selbstkostenpreis 14 € beträgt?

$f(x) = (20 - 0,02 \cdot x - 14) \cdot (10.000 + 100 \cdot x) \quad \rightarrow \quad x = 100 \quad \rightarrow \quad 18$ €

Aufgabe 6 (6 BE)

Gegeben ist ein Kreis mit Radius r. Rollt man einen Kreissektor mit Mittelpunktswinkel α zusammen, entsteht ein Kegel. Bestimmen Sie α so, dass das Volumen des Kegels maximal wird. (Vergleichen Sie mit einer Filtertüte für Kaffee.)