Extremwertprobleme (10.01.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Aus einem 36 cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Bestimmen Sie die Kantenlängen unter der Bedingung, dass das Volumen maximal wird.

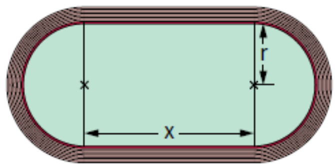
Aufgabe 2 (6 BE)

Ein rechteckiges Plakat hat eine Fläche von 35 dm^2. Es wird so bedruckt, dass die Ränder an den Seiten jeweils 4 cm, oben und unten jeweils 5 cm betragen. Bestimmen Sie die Maße des Plakates mit der größten bedruckbaren Fläche.

Aufgabe 3 (6 + 2 BE)

Eine 400-m-Laufbahn in einem Sportstadion besteht aus zwei Halbkreisen, die durch zwei parallele Strecken verbunden sind.

a) Wie müssen der Radius r der Halbkreise und die Länge x der parallelen Strecken gewählt werden, damit die mittlere Rechteckfläche einen maximalen Flächeninhalt hat?



b) Recherchieren Sie, ob Stadien in der Nähe Ihres Wohnortes diese Abmessungen besitzen.

Abbildung 1: Elemente der Mathematik. Sachsen 11, S. 136

Aufgabe 4 (6 BE)

Ein Gewölbegang hat einen Querschnitt von der Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang des Querschnitts ist durch $U = 10$ m fest vorgegeben. Wie muss das Gewölbe gestaltet werden, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird?

Aufgabe 5 (6 BE)

Von einer Kaffeesorte werden bei einem Preis von 20 € für 1 kg im Monat 10.000 kg verkauft. Eine Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissenkung von 0,02 € je kg zu einer Absatzsteigerung von jeweils 100 kg im Monat führen würde. Bei welchem Verkaufspreis wäre der Gewinn maximal, wenn für 1 kg Kaffee der Selbstkostenpreis 14 € beträgt?

Aufgabe 6 (6 BE)

Gegeben ist ein Kreis mit Radius r. Rollt man einen Kreissektor mit Mittelpunktswinkel α zusammen, entsteht ein Kegel. Bestimmen Sie α so, dass das Volumen des Kegels maximal wird. (Vergleichen Sie mit einer Filtertüte für Kaffee.)

H. Wuschke

Aufgabe A1.1.3 Abitur 2008

Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{18}x^3 - 2x \quad \text{und} \quad f_2(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 0,5x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Gegeben sind die Punkte $Q\,(u|f_1(u))$ und $R\,(u|f_2(u))$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 3, u \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Abstand der Punkte Q und R für $u = 1$

Ermitteln Sie rechnerisch den Wert für u so, dass der Abstand zwischen den Punkten Q und R maximal wird.

Kurzlösung: Abstand für $u = 1$: LE $u =$

Extremwertprobleme und Funktionsgraphen (Dreiecke)

H. Wuschke

Aufgabe A1.2.3 Abitur 2008 mit CAS

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Ihr Graph ist G.

Ein Dreieck OAB entsteht durch den Koordinatenursprung O, den Schnittpunkt A des Graphen mit dem positiven Teil der x-Achse und den Punkt B.
Der Punkt B liegt im ersten Quadranten auf G.

Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

Aufgabe A1.3 Abitur 2012

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Graph heißt F.

Die Punkte $R\left(-u|f(-u)\right), S(0|0)$ und $T\left(u|f(u)\right)$ mit $0 < u < 1$ bestimmen ein Dreieck.
Berechnen Sie den Wert von u so, dass die Dreiecksfläche maximal wird.

Aufgabe A1.3.3 Abitur 2018

Gegeben ist die für alle reellen Zahlen x mit $-2 \leqq x \leqq 8$ definierte Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$$

Für jeden Wert von a mit $0 \leqq a < 7; a \in \mathbb{R}$ liegt ein Dreieck ABC mit $A(a|0), B(7|0)$ und $C\left(a|f(a)\right)$ im ersten Quadranten.
Fertigen Sie zu diesem Sachverhalt eine Skizze an.
Begründen Sie, dass es sinnvoll ist, für a den Wert 7 auszuschließen.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass die Fläche des Dreiecks ABC möglichst groß wird.

Kurzlösung A1.2.3: maximaler Flächeninhalt: FE $B(\quad|\quad)$

Kurzlösung A1.3: maximaler Flächeninhalt: FE $u =$

Kurzlösung A1.3.3: maximaler Flächeninhalt: FE $C(\quad|\quad)$

Extremwertprobleme und Funktionsgraphen (Rechtecksflächen)

H. Wuschke

Aufgabe A1.4 Abitur 2010

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{27}x^3 + 3x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Der Graph von f ist K.

Auf dem Graphen K ist ein Punkt $P\,(r|f(r))$ mit $r \in \mathbb{R}, 0 < r < 9$ gegeben.
Durch P werden Parallelen zu den Koordinatenachsen gelegt.
Diese Parallelen und die Koordinatenachsen begrenzen ein Rechteck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal wird.

Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Aufgabe A1.2.2 Abitur 2013

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Durch die Punkte $O(0|0), P(u|0), Q\,(u|f(u))$ und $R\,(0|f(u))$ mit $0 < u < 5$ wird ein Rechteck eindeutig festgelegt.
Bestimmen Sie den Wert von u so, dass der Flächeninhalt des Rechteckes maximal wird.
Geben Sie den Flächeninhalt dieses Rechtecks an.

Kurzlösung A1.4: maximaler Flächeninhalt: FE $P($ | $)$

Kurzlösung A1.2.2: maximaler Flächeninhalt: FE $u =$

Extremwertprobleme und Funktionsgraphen (Recktecksumfang)

H. Wuschke

Aufgabe B1.2 Abitur 2009

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = e^{-2x+1} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Der Graph von f ist K.

Auf dem Graphen K ist ein Punkt $P(r|s)$ mit $r > 0$ gegeben.
Durch P werden Parallelen zu den Koordinatenachsen gelegt.
Diese Parallelen und die Koordinatenachsen begrenzen ein Rechteck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass der Umfang dieses Rechtecks minimal wird.

Geben Sie den minimalen Umfang an.

Aufgabe A1.5 Abitur 2011

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{2x+1}{x} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

Der Graph von f ist K.

Auf K existiert ein Punkt $Q\,(r|f(r))$ mit $r \in \mathbb{R}, r > 0$.
Durch Q werden Parallelen zu den Koordinatenachsen gelegt.
Diese Parallelen und die Koordinatenachsen bilden ein Rechteck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von Q so, dass der Umfang dieses Rechtecks minimal wird.

Berechnen Sie den minimalen Umfang.

Kurzlösung A1.2: minimaler Umfang: LE $P($ $|$ $)$

Kurzlösung A1.5: minimaler Umfang: LE $Q($ $|$ $)$