Aufgaben zu Funktionsbestimmung (06.12.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (12 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung eines Polynoms dritten Grades, dessen Graph die nachfolgenden Eigenschaften besitzt und skizzieren Sie diese: Es ist $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ und $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ und $f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

a) ... hat im Punkt $T(1|0)$ einen Tiefpunkt und im Punkt $H(3|4)$ einen Hochpunkt.

Die Bedingungen sind $f(1) = 0$ (Punkt), $f'(1) = 0$ (Tiefpunkt), $f(3) = 4$ (Punkt) und $f'(3) = 0$ (Hochpunkt).

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

b) ... Koordinatenursprung ist Wendepunkt, der Punkt $H(3|2)$ ist Hochpunkt.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f''(0) = 0$ (Wendepunkt), $f(3) = 2$ (Punkt) und $f'(3) = 0$ (Hochpunkt).

$f(x) = -\frac{1}{27}x^3 + x$

c) ... im Wendepunkt $W(2|4)$ hat die Wendetangente die Steigung -3, außerdem geht der Graph durch den Ursprung.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f(2) = 4$ (Punkt), $f''(2) = 0$ (Wendepunkt) und $f'(2) = -3$ (Steigung der Wendetangente).

$f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x$

d) ... geht durch den Koordinatenursprung und hat in $S(2|1)$ einen Sattelpunkt.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f(2) = 1$ (Punkt), $f'(2) = 0$ (Sattelpunkt) und $f''(2) = 0$ (Sattelpunkt).

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$

e) ... verläuft durch die Punkte $P(0|-5)$ sowie $Q(1|0)$ und berührt die x-Achse im Punkt $R(5|0)$.

Die Bedingungen sind $f(0) = -5$ (Punkt), $f(1) = 0$ (Punkt), $f(5) = 0$ (Punkt) und $f'(5) = 0$ (berührt die x-Achse).

$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{11}{5}x^2 + 7x - 5$

f) ... im Punkt $P(1|4)$ eine Tangente parallel zur 1. Winkelhalbierenden und in $Q(0|2)$ eine Tangente Parallel zur x-Achse.

Die Bedingungen sind $f(1) = 4$ (Punkt), $f(0) = 2$ (Punkt), $f'(1) = 1$ (parallel zur 1. Winkelhalbierenden) und $f'(0) = 0$ (parallel zur x-Achse).

$f(x) = -3x^3 + 5x^2 + 2$

g) ... verläuft durch den Koordinatenursprung und besitzt den Wendepunkt $W(1|-2)$. Die Wendetangente schneidet die x-Achse in $Q(2|0)$.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f(1) = -2$ (Punkt), $f''(1) = 0$ (Wendepunkt)

Die letzte Information ist schwieriger. Wir können den Anstieg der Wendetangente durch den Differenzenquotienten ermitteln:

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-2)}{2-1} = 2 = f'(1)$ (Anstieg der Wendetangente)

$f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 10x$

Aufgabe 2 (je 3 BE)

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion 5. Grades, welche punktsymmetrisch zum Ursprung mit Ursprungsgerade $y = 7 \cdot x$ ist sowie einen Wendepunkt $W(1|0)$ besitzt.

$f(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^3 + c \cdot x$ (aufgrund der Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)
$f'(x) = 5 \cdot a \cdot x^4 + 3 \cdot b \cdot x^2 + c$
$f''(x) = 20 \cdot a \cdot x^3 + 6 \cdot b \cdot x$

Es gelten die drei Gleichungen:

I $f'(0) = 7$ (Anstieg der Ursprungsgeraden)
II $f(1) = 0$ (Koordinaten des Wendepunktes)
III $f''(1) = 0$ (Eigenschaften des Wendepunktes)

$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot x^5 - 10 \cdot x^3 + 7 \cdot x$

b) Bestimmen Sie die Gleichung einer zur y-Achse achsensymmetrischen Funktion 4. Grades, deren Wendetangente im Ursprung mit einer Steigung 1 liegt und im Punkt $P(2|4)$ hat die Funktion ein Extremum.

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ (aufgrund der Achsensymmetrie zur y-Achse)
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$

Statt 3 Informationen gelten folgende 5 Gleichungen:

I $f(0) = 0$ (Wendepunkt im Ursprung)
II $f''(0) = 0$ (Eigenschaften des Wendepunktes)
III $f'(0) = 1$ (Anstieg der Wendetangente)
IV $f(2) = 4$ (Punktkoordinaten)
V $f'(2) = 4$ (Eigenschaften des Extremums)

$\Rightarrow$ keine Lösung möglich

Wenn die Funktion nicht achsensymmetrisch ist, wäre $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{4}x^3 + x$

Aufgabe 3 – ohne CAS (5 BE)

Der Graph einer quadratischen Funktion f verläuft durch den Koordinatenursprung. Die Tangente an diesen Graphen im Punkt $(2|f(2))$ hat die Gleichung $y = 4x - 2$. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

Es ist $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Der Punkt P liegt auch auf der Tangente. Um also die y-Koordinate zu bestimmen, wird der x-Wert des Punktes in die Tangentengleichung eingesetzt: $y = 4 \cdot 2 - 2 = 6 \quad \rightarrow \quad P(2|6)$.

Nun können die drei Gleichungen aufgestellt werden:
Durch den Koordinatenursprung gilt: $f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$
Also ist die Gleichung für f nur noch $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ und $f'(x) = 2a \cdot x + b$

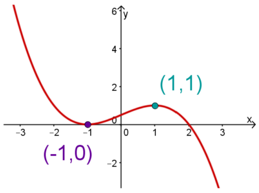
Punkt $P(2|6)$: $f(2) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 2b = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + b = 3$ (I)

Anstieg in $P(2|6)$ ist 4: $f'(2) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + b = 4$ (II)

Nun muss das Gleichungssystem gelöst werden. Aus (I) lässt sich b gut umstellen: $b = 3 - 2a$.
Dies wird in (II) eingesetzt:
$4a + 3 - 2a = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$
$b = 3 - 2a \quad \Leftrightarrow \quad b = 3 - 1 = 2 \qquad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

Aufgabe 4 (3 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der dargestellten Funktion.[1]



Wahrscheinlich ist dies eine Funktion dritten Grades, also gelten alle Bedingungen wie in Aufgabe 1.

Die Gleichungen sind:

$f(-1) = 0$ und $f(1) = 1$ (aufgrund der beiden Punktkoordinaten).

$f'(-1) = 0$ und $f'(1) = 0$ (aufgrund der Eigenschaften von Hoch- und Tiefpunkt).

Daher ist $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

[1] Quelle: `https://de.serlo.org/mathe/2157/steckbriefaufgabe`