Aufgaben zu Linearen Gleichungssystemen (26.11.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (18 BE)

Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender LGS und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anschließend mithilfe dem CAS.

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 4x & - & 5y & - & 2z & = & 3 \\ 6x & + & y & - & 5z & = & 9 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right) \overset{II+2I}{\underset{III+3I}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right) \overset{4\cdot II}{\underset{3\cdot III}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 8 & 4 \\ 0 & 12 & 3 & 18 \end{array}\right)$$

$$\overset{III+II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array}\right) \quad \rightarrow z = 2 \quad \rightarrow y = 1 \quad \rightarrow x = -3 \quad \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -4 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 10 \\ -1 & -4 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{II-2I}{\underset{III+I}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{III+II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad 0 = 1 \text{ Widerspruch}$$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \{\}$ eine andere Schreibweise wäre $\mathcal{L} = \emptyset$

3. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -5 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 10 \\ -1 & -4 & 2 & -5 \end{array}\right) \overset{II-2I}{\underset{III+I}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{III+II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ & & 5y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

Wir haben nun also 2 Gleichungen und 3 Unbekannte, also muss eine Unbekannte als beliebige Variable gesetzt werden. Nehmen wir dafür beispielsweise z.

Setze $z = t \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad 5y = 3t \Rightarrow y = \frac{3}{5}t$

$x - \frac{3}{5}t + t = 5 \Leftrightarrow x = 5 - \frac{2}{5}t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{2}{5}t \\ & \frac{3}{5}t \\ & t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

4. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & = & -6 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right) \underset{III+I}{\overset{II-I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \quad \rightarrow z = 3 \quad \rightarrow y = 2 \quad \rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

5. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ -2x & + & y & + & z & = & 2 \\ & - & 5y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{II+2I}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \quad 0 = 8 \text{ Widerspruch}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \{\}$$

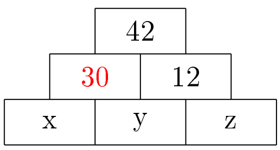
6. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{III-I}{\overset{II-I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow -2z = -6 \Leftrightarrow z = 3 \quad \rightarrow y - 2 \cdot 3 = -2 \Leftrightarrow y = 4 \quad \rightarrow x + 3 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2 (6 + 4 BE)

Früher hatten Sie im Unterricht Zahlenmauern oder Rechentafeln, um die Addition verschiedener Zahlen zu üben.



+	4	y	7
3	7		10
x		6	
5	9		12

a) Stellen Sie für die Zahlenmauer und die Rechentafel das entsprechende Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses.

Für die Zahlenmauer gelten die Gleichungen

$$x + y = 30 \qquad \text{und} \qquad y + z = 12$$

Wie in Aufgabe 1.3 haben wir 2 Gleichungen und 3 Unbekannte, also muss wieder eine Unbekannte als eine beliebige Variable gesetzt werden. Wählen wir dieses Mal y, weil es in beiden Gleichungen vorkommt.

Setze $y = t \in \mathbb{R} \quad \to \quad x = 30 - t$ und $z = 12 - t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -t \\ & t \\ 12 & -t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

In der Rechentafel gilt lediglich eine Gleichung:

$$x + y = 6$$

Dies ist also 1 Gleichung mit 2 Unbekannten. Setzen wir also $y = t \in \mathbb{R}$, dann ist $x = 6 - t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -t \\ & t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Eine Lehrkraft an der Grundschule möchte sich wenig Arbeit machen und möglichst viele Zahlenmauern bzw. Rechentafeln aus den beiden Vorlagen erstellen. Begründen Sie, wie viele Möglichkeiten es für die Zahlenmauer und wie viele es für die Rechentafel gibt.

Bei der Zahlentafel dürfen keine negativen Zahlen stehen, keine Brüche und erst recht keine irrationalen Zahlen. Es darf also maximal 0 als nicht natürliche Zahl da stehen und ansonsten können Zahlenmauern und Rechentafeln in der Grundschule aus natürlichen Zahlen bestehen.

Aus der Zahlenmauer können 13 verschiedene Mauern aufgrund der Lösungsmenge gemacht werden. Analog gibt es bei der Rechentafel 7 verschiedene Rechentafeln.

Aufgabe 3 (4 + 6 BE)

Ein Kaffeegroßröster stellt Kaffeemischungen verschiedener Preisklassen her. Der Preis für 500 g von einer Bohnensorte A beträgt 6,00 €, für 500 g von einer Bohnensorte B 7,50€, für 500g von einer Sorte C 9,00 €und für 500 g von einer Sorte D 11,25 €.

a) Eine Mischung soll Bohnen der Sorte A, B, C enthalten und 6,75 €pro 500 g kosten. Begründen Sie, dass man aus diesen Angaben das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 6a & + & 7,5b & + & 9c & = & 6,75 \\ a & + & b & + & c & = & 1 \end{array}$$ aufstellen kann.

Ermitteln Sie eine mögliche Mischung. Wie groß darf der Anteil der Sorte C höchstens sein?

a: Anteil der Bohnensorte A an der Gesamtmenge in Prozent. Analog für b, c und d.
Für den Gesamtpreis der Mischung gilt: $6a + 7,5b + 9c = 6,75$
Die Anteile müssen zusammen 100% ergeben, also $a + b + c = 1$

Das zugehörige Gleichungssystem hat die Lösungsmenge: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

(nachrechnen)
Aus der zweiten Zeile folgt, dass $0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}$ sein muss, da ansonsten negative Mischungen für die Kaffeesorte B herauskommen. Da dies der Mischung von Kaffeesorte C entspricht, darf somit maximal 25% von Kaffeesorte C eingemischt werden.

b) Eine Mischung soll Bohnen der Sorte A, B und D enthalten und 9 € pro 500 g kosten.

- Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und bestimmen Sie alle Lösungen.

  Das LGS lautet: $\begin{array}{ccccccc} 6a & + & 7,5b & + & 11,25d & = & 9 \\ a & + & b & + & d & = & 1 \end{array}$

  Die Lösung dieses LGS lautet: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ -3,5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

  (nachrechnen)

- Untersuchen Sie, ob eine Mischung von 10 % von Sorte D möglich ist.

  Wir setzen in unsere Lösung $t = 0,1$ ein: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ -3,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75 \\ 1,65 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

  Das das Mischverhältnis der Kaffeesorte A negativ ist und bei Kaffeesorte B 165% eingemischt werden sollen, ist es nicht möglich.

- Wie groß muss der Anteil der Sorte D sein, sodass eine Mischung 9 € kostet?

  Damit die Mischung von Kaffeesorte A zwischen 0 und 1 liegt, $\frac{2}{5} \leqq t \leqq \frac{4}{5}$ gelten.

  Damit die Mischung von Kaffeesorte B zwischen 0 und 1 liegt, $\frac{2}{7} \leqq t \leqq \frac{4}{7}$ gelten.

  Da beide Bedingungen erfüllt sein müssen, ist $\frac{2}{5} \leqq t \leqq \frac{4}{7}$ als Mischungsverhältnis für die Kaffeesorte D möglich.