Parameterfunktionen (08.11.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (14 BE) – ohne CAS

Leiten Sie die gegebenen Funktionen zweimal nach der Variable ab, die in der Funktionsgleichung steht.

a) $f(x) = (5x^2 + 3) \cdot (8x^4 - 3x^2 - 4)$

$f'(x) = 10x \cdot (8x^4 - 3x^2 - 4) + (5x^2 + 3) \cdot (32x^3 - 6x)$
$f''(x) = 10 \cdot (8x^4 - 3x^2 - 4) + 10x \cdot (32x^3 - 6x) + 10x \cdot (32x^3 - 6x) + (5x^2 + 3) \cdot (96x^2 - 6)$

(Bemerkung: *Das könnte man auch ausmultiplizieren, aber kein Mensch hat Lust darauf.*)

b) $f(x) = \sin(3x + 5) \cdot x^3$

$f'(x) = 3 \cdot \cos(3x + 5) \cdot x^3 + 3 \cdot \sin(3x + 5) \cdot x^2$
$f''(x) = -9 \cdot \sin(3x + 5) \cdot x^3 + 9 \cdot \cos(3x + 5) \cdot x^2 + 9 \cdot \cos(3x + 5) \cdot x^2 + 6 \cdot \sin(3x + 5) \cdot x$

c) $f(x) = e^{5x} \cdot 3 \cdot x^4$

$f'(x) = 15 \cdot e^{5x} \cdot x^4 + 12 \cdot e^{5x} \cdot x^3 = 3 \cdot e^{5x} \cdot (5x^4 + 4x^3)$

$f''(x) = 15 \cdot e^{5x} \cdot (5x^4 + 4x^3) + 3 \cdot e^{5x} \cdot (20x^3 + 12x^2) = 3 \cdot e^{5x} \cdot (25x^4 + 40x^3 + 12x^2)$

d) $f(x) = 7 \cdot \sqrt[5]{(12x - 3)^{10}} = 7 \cdot (12x - 3)^2$

$f'(x) = 14 \cdot 12 \cdot (12x - 3) = 168 \cdot (12x - 3)$
$f''(x) = 168 \cdot 12 = 2016$

e) $f(a) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

$f'(a) = 12a^3b^7c^5 - 3 \cdot e^{3a-4b+2c}$

$f''(a) = 36a^2b^7c^5 - 9 \cdot e^{3a-4b+2c}$

f) $f(b) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

$f'(b) = 21a^4b^6c^5 + 4 \cdot e^{3a-4b+2c}$

$f''(b) = 126a^4b^5c^5 - 16 \cdot e^{3a-4b+2c}$

g) $f(c) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

$f'(c) = 15a^4b^7c^4 - 2 \cdot e^{3a-4b+2c}$

$f''(c) = 60a^4b^7c^3 - 4 \cdot e^{3a-4b+2c}$

Aufgabe 2 (2 + 1 + 2 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Parameterfunktion $g_r(x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ mit $r \in \mathbb{R}; r \neq 0$

a) Weisen Sie nach, dass $g_r(x)$ punktsymmetrisch ist.

$g_r(x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x$

$g_r(-x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x) = -\frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 + 2x$

$-g_r(x) = -\left(\frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x\right) = -\frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 + 2 \cdot x$

Da $g_r(-x) = -g_r(x)$ gilt, ist der Graph von $g_r(x)$ punktsymmetrisch.

b) Geben Sie die Nullstellen von $g_2(x)$ an.

$g_2(x) = \frac{12}{10}x^3 - 2x$. Die Nullstellen sind: $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}\ ,\ x_2 = 0\ ,\ x_3 = \sqrt{\frac{5}{3}}$

c) Bestimmen Sie, für welches $r > 0$ die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$ sind.

Für die Nullstelen gilt: $0 = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2x \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2\cdot\sqrt{15}}{3r}\ ,\ x_2 = 0\ ,\ x_3 = \frac{2\cdot\sqrt{15}}{3r}$

Da $x_2 = 0$ stets erfüllt ist und $g_r(x)$ nach Aufgabe a) punktsymmetrisch ist, genügt es, den Parameter r mithilfe der Gleichung

$$3 = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{3r}$$

zu bestimmen. Es folgt somit: $r = \frac{2\cdot\sqrt{15}}{9}$

d) Berechnen Sie die Extrempunkte (mit Art) in Abhängigkeit von r und den Wendepunkt von $g_r(x)$.

$g_r'(x) = \frac{9}{10} \cdot r^2 \cdot x^2 - 2 \qquad g_r''(x) = \frac{9}{5} \cdot r^2 \cdot x \qquad g_r'''(x) = \frac{9}{5} \cdot r^2$

<u>Extremstellen (notwendige Bedingung):</u>

$0 = g_r'(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}\ ,\ x_2 = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}$

<u>Extremstellen (Art):</u>

$g_r''\left(-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}\right) = -\frac{6\cdot\sqrt{5}\cdot r}{5} < 0 \quad \rightarrow \quad$ lokales Maximum bei $x_{\max} = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}$

$g_r''\left(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}\right) = \frac{6\cdot\sqrt{5}\cdot r}{5} > 0 \quad \rightarrow \quad$ lokales Minimum bei $x_{\min} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}$

<u>Extrempunkte:</u>

$g_r\left(-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}\right) = \frac{8\cdot\sqrt{5}}{9r} \quad \Rightarrow \quad H\left(-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r} \mid \frac{8\cdot\sqrt{5}}{9r}\right)$

$g_r\left(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r}\right) = -\frac{8\cdot\sqrt{5}}{9r} \quad \Rightarrow \quad T\left(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r} \mid -\frac{8\cdot\sqrt{5}}{9r}\right)$

Diese Betrachtung gilt für $r > 0$. Bei $r < 0$ ist es genau anders herum.

<u>Wendestelle (notwendige Bedingung):</u>

$0 = g_r''(x) \quad \Rightarrow \quad x = 0$

<u>Überprüfung Wendestelle:</u>

$g_r'''(0) = \frac{9}{5} \cdot r^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ Wendestelle bei $x_W = 0$

<u>Wendepunkt:</u>

$g_r(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0|0)$

e) Bestimmen Sie, für welches $r > 0$ der Hochpunkt die Koordinaten $H\left(-\frac{2}{15} \mid \frac{8}{45}\right)$ besitzt.

$-\frac{2}{15} = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r} \qquad \Rightarrow \qquad r = 5 \cdot \sqrt{5}$

f) Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte für $r > 0$.

Für den Hochpunkt gilt: $x = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r} \Leftrightarrow r = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3x}$ und daher ist $y = \dfrac{8\cdot\sqrt{5}}{9\cdot\left(-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3x}\right)} = -\frac{4}{3}\cdot x$

Aufgrund der Punktsymmetrie, liegt der Tiefpunkt auch auf dieser Geraden. Dies könnte auch rechnerisch nachgewiesen werden.

Aufgabe 3 (2 + 3 BE)

Durch die Gleichung $f_a(x) = (x^2 - a^2)\cdot e^{ax}$ wird für jede positive Zahl a eine Funktion f_a definiert.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_a.

Da e^{ax} nie Null sein kann, egal was für a oder x eingesetzt wird, muss gelten:

$x^2 - a^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -a$ und $x_2 = a$

b) Zeigen Sie, dass die positive Nullstelle von f_a niemals eine Extremstelle dieser Funktion sein kann.

$f_a'(x) = 2x\cdot e^{ax} + (x^2 - a^2)\cdot a\cdot e^{ax}$

Also ist $f_a'(a) = 2a\cdot e^{a^2} \neq 0$, weil a eine positive Zahl ist.

Aufgabe 4 (3 + 2 BE)

Gegeben ist die Parameterfunktion f_a mit $f_a(x) = x\cdot e^{x+a}$. Dabei sei a eine positive Zahl.

a) Leiten Sie die Gleichung derjenigen Funktion f_a der Schar her, deren Graph durch den Punkt $(-2|-2)$ verläuft.

$f_a(-2) = -2$ gilt aufgrund des Punktes, also ist:

$-2\cdot e^{-2+a} = -2 \qquad \overset{:(-2)}{\Rightarrow} \qquad e^{-2+a} = 1$

Es gilt für jede reelle Zahl: $a^0 = 1$, also muss im Exponenten eine Null herauskommen. Daher ist $a = 2$.

Nun soll $f_2(x) = x\cdot e^{x+2}$ abgeleitet werden. Es ist $f_2'(x) = e^{x+2} + x\cdot e^{x+2} = (1+x)\cdot e^{x+2}$.

b) Weisen Sie nach, dass jede Funktion der Schar einen Graphen mit einem Tiefpunkt besitzt.

Es ist $f_a'(x) = e^{x+a} + x\cdot e^{x+a} = (1+x)\cdot e^{x+a}$

$0 = (1+x)\cdot e^{x+a} \qquad \Rightarrow \qquad x = -1.$

Zur Bestimmung der Art des Extremums muss $x = -1$ nun in die zweite Ableitung eingesetzt werden. Es ist:

$f_a''(x) = e^{x+a} + (1+x)\cdot e^{x+a} \qquad \Rightarrow \qquad f_a''(-1) = e^{-1+a} > 0$, also ist die Extremstelle immer ein lokales Minimum.

Aufgabe 5 (2 + 3 BE)

Für jede reelle Zahl t ist eine Funktion f_t durch $f_t(x) = x^3 - 2tx^2 + t^2x$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Wendestelle des Graphen von f_t.

$f_t'(x) = 3x^2 - 4tx + t^2$

$f_t''(x) = 6x - 4t$

$f_t'''(x) = 6$

Wendestelle bestimmen: $0 = 6x - 4t \quad \Leftrightarrow \quad 4t = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}t$ (ist Wendestelle, weil $f_t'''\left(\frac{2}{3}t\right) = 6 \neq 0$ ist.

b) Untersuchen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

$f_t(x) = x \cdot (x^2 - 2tx + t^2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

Für x_2 und x_3 ist $0 = x^2 - 2tx + t^2$ mit der p-q-Formel zu lösen.

$x_{2/3} = t \pm \sqrt{t^2 - t^2} = t$

Also hat $f_t(x)$ nur eine Nullstelle, wenn $t = 0$ ist und sonst zwei Nullstellen.

Bemerkung: Das hätte man auch sehen können, wenn man binomische Formeln kann: $x \cdot (x^2 - 2tx + t^2) = x \cdot (x - t)^2$

Aufgabe 6 (2 + 3 BE)

Für jedes positive reelle a ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = e^{a \cdot x^2} - e^a; \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $P_a\,(1 \mid f_a(1))$.

$f_a(1) = e^{a \cdot 1^2} - e^a = e^a - e^a = 0$, also $P_a(1|0)$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt P_a.

$f_a'(x) = 2x \cdot e^{a \cdot x^2}$

$f_a'(1) = 2 \cdot e^a$

$y = m \cdot x + n \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \cdot e^a \cdot 1 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = -2 \cdot e^a$

$t_{P_a}(x) = 2 \cdot e^a \cdot x - 2 \cdot e^a = 2 \cdot e^a \cdot (x - 1)$

Aufgabe 7 (2 + 3 BE)

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4; \quad x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat.

$f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4 = x^4 \cdot (a \cdot x^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad$ eine Nullstelle ist also daher $x_1 = 0$.

$0 = a \cdot x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = a \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} = x^2$

$\Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$ und $x_3 = \sqrt{\frac{1}{a}}$

Für $a < 0$ sind beide Wurzeln undefiniert und dann hätte $f_a(x)$ nur die Nullstelle $x_1 = 0$. Daher hat $f_a(x)$ mehr als eine Nullstelle für $a > 0$.

b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
Bestimmen Sie diesen Wert von a.

$f_a'(x) = 6ax^5 - 4x^3$
$f_a''(x) = 30ax^4 - 12x^2$

$0 = 6ax^5 - 4x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2x^3 \cdot (3ax^2 - 2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

$0 = 3ax^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3a} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3a}}$ und $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3a}}$

Es muss also gelten $\frac{2}{3a} = 1$. Wenn man den Bruch umschreibt, steht dort $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} = 1$. Damit das gilt, muss $a = \frac{2}{3}$ sein, denn $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$.

Aufgabe 8 (4 + 2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen f_k auf Extrem- und Wendepunkte. Skizzieren Sie den Graphen für $k = -2$ und $k = 2$.

$f_k'(x) = 4x^3 - 2k \cdot x \qquad f_k''(x) = 12x^2 - 2k \qquad f_k'''(x) = 24x$

Für $k = 0$ ist die Funktionsgleichung $f_0(x) = x^4$ und besitzt ein globales Minimum bei $T(0 \mid 0)$, jedoch keinen Wendepunkt.

Extrempunkte:

$0 = f_k'(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{\frac{k}{2}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{k}{2}}$

x_1 und x_3 sind also nur definiert für $k > 0$.

$f_k''(0) = -2k$ Daher ist bei $x = 0$ ein Maximum für $k > 0$ und ein Minimum für $k \leqq 0$.

$f_k(0) = 0 \quad \rightarrow \quad$ Das Extremum hat die Koordinaten $E_1(0 \mid 0)$

$f_k''\left(\pm\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = 4k > 0$ also sind an beiden Stellen jeweils Minima.

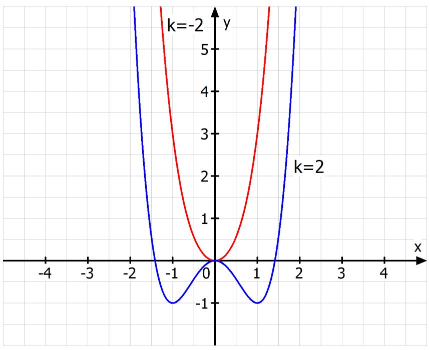
$f_k\left(\pm\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = -\frac{k^2}{4} \quad \rightarrow \quad E_2\left(-\sqrt{\frac{k}{2}} \mid -\frac{k^2}{4}\right)$ und $E_3\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \mid -\frac{k^2}{4}\right)$

Wendepunkte:

$0 = f_k''(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{\frac{k}{6}}$ und $x_2 = \sqrt{\frac{k}{6}}$. Also existieren Wendepunkte grundsätzlich nur für $k > 0$.

$f_k'''\left(-\sqrt{\frac{k}{6}}\right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{k}{6}} \neq 0$ (analog für x_2). Daher existieren die Wendepunkte wirklich für $k > 0$

$f_k\left(\pm\sqrt{\frac{k}{6}}\right) = -\frac{5k^2}{36} \quad \rightarrow \quad W_1\left(-\sqrt{\frac{k}{6}} \mid -\frac{5k^2}{36}\right)$ und $W_2\left(\sqrt{\frac{k}{6}} \mid -\frac{5k^2}{36}\right)$



b) Bestimmen Sie für $k > 0$ die Ortskurve der Tiefpunkte aller Funktionsgraphen.

$x = \sqrt{\frac{k}{2}} \quad \Rightarrow \quad k = 2 \cdot x^2 \qquad y = -\frac{(2x^2)^2}{4} = -x^4$

c) Es sind $x_e \neq 0$ eine Extremstelle und $x_w \neq 0$ eine Wendestelle von f_k für $k > 0$.
Zeigen Sie: Das Verhältnis $\frac{x_e}{x_w}$ häng nicht von k ab. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Aussage.

$\frac{x_e}{x_w} = \frac{\sqrt{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\frac{k}{6}}} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_e = \sqrt{3} \cdot x_w$

Also ist die Extremstelle immer um ein Vielfaches größer als die Wendestelle.

Aufgabe 9 (6 BE)

Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = (e^x - t)^2$ und $t > 0$. Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurven der Extrempunkte und der Wendepunkte. Zeichnen Sie die Ortskurven zusammen mit einigen Graphen der Funktionsschar in ein gemeinsames Koordinatensystem.

$f_t'(x) = 2 \cdot (e^x - t) \cdot e^x$ $\quad$ $f_t''(x) = 2 \cdot e^x \cdot (2 \cdot e^x - t)$ $\quad$ $f_t'''(x) = 2 \cdot e^x \cdot (4 \cdot e^x - t)$

$0 = f_t'(x) \quad \Rightarrow \quad x = \ln(t)$ $\quad$ $f_t''(\ln(t)) = 2 \cdot t^2 > 0$ also ist bei $x = \ln(t)$ ein lokales Minimum

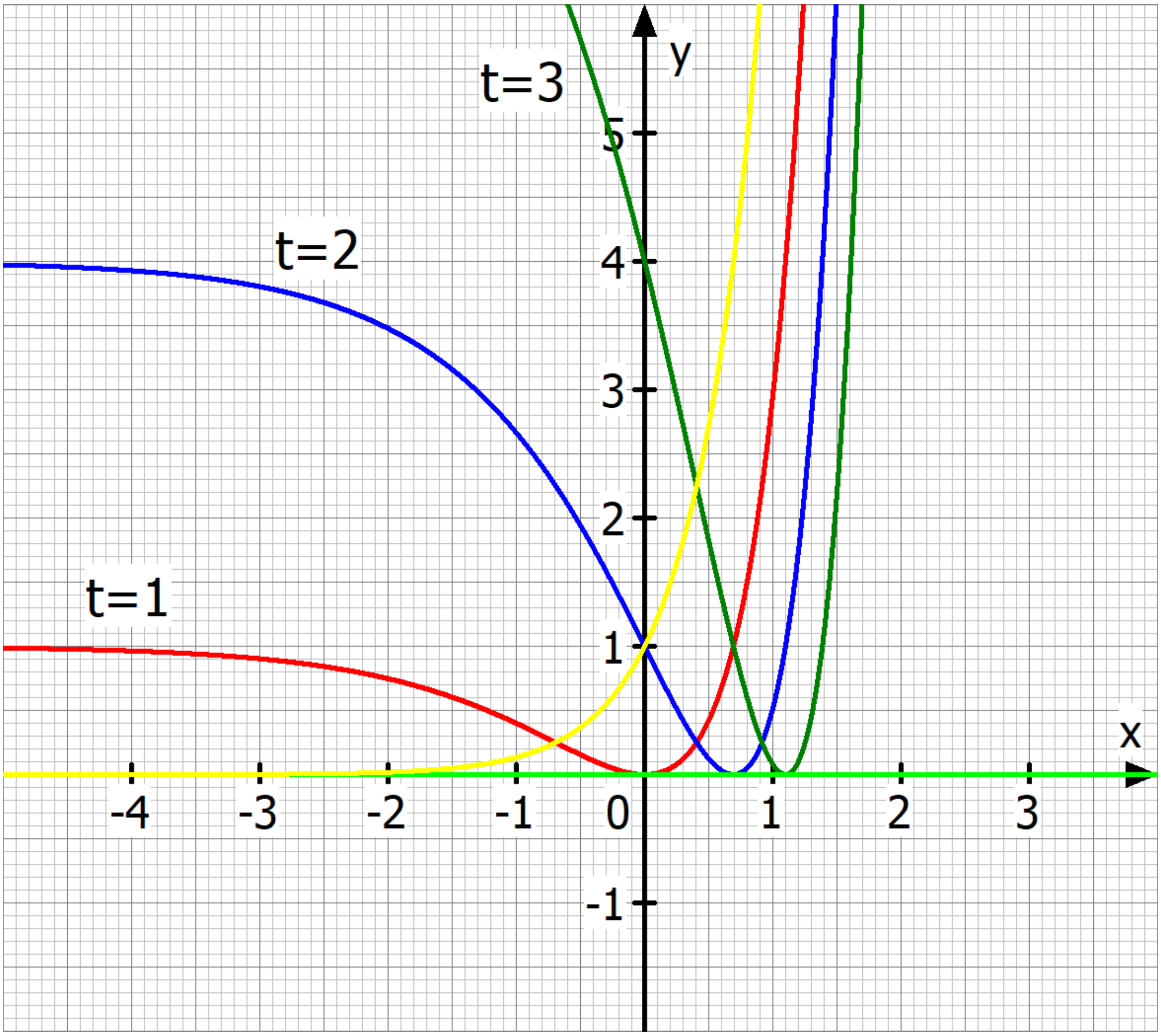
$f_t(\ln(t)) = 0 \quad \rightarrow \quad T(\ln(t) \mid 0)$

$0 = f_t''(x) \quad \Rightarrow \quad x = \ln\left(\frac{t}{2}\right)$ $\quad$ $f_t'''\left(\ln\left(\frac{t}{2}\right)\right) = t^2 \neq 0$ also existiert die Wendestelle.

$f_t\left(\ln\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{t^2}{4} \quad \rightarrow \quad W\left(\ln\left(\frac{t}{2}\right) \mid \frac{t^2}{4}\right)$

Ortskurve der Extrempunkte: $y = 0$ (weil alle Extrempunkte auf der x-Achse liegen.

Ortskurve der Wendepunkte: $x = \ln\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow t = 2 \cdot e^x \quad \rightarrow \quad y = \frac{(2 \cdot e^x)^2}{4} = (e^x)^2 = e^{2x}$



Hier ist die neongrüne Linie die Ortskurve der Tiefpunkte und die gelbe Linie die Ortskurve der Wendepunkte.