Parameterfunktionen (08.11.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (14 BE) – ohne CAS

Leiten Sie die gegebenen Funktionen zweimal nach der Variable ab, die in der Funktionsgleichung steht.

a) $f(x) = (5x^2 + 3) \cdot (8x^4 - 3x^2 - 4)$

b) $f(x) = \sin(3x + 5) \cdot x^3$

c) $f(x) = e^{5x} \cdot 3 \cdot x^4$

d) $f(x) = 7 \cdot \sqrt[5]{(12x - 3)^{10}}$

e) $f(a) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

f) $f(b) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

g) $f(c) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

Aufgabe 2 (2 + 1 + 2 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Parameterfunktion $g_r(x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ mit $r \in \mathbb{R}; r \neq 0$

a) Weisen Sie nach, dass $g_r(x)$ punktsymmetrisch ist.

b) Geben Sie die Nullstellen von $g_2(x)$ an.

c) Bestimmen Sie, für welches $r > 0$ die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$ sind.

d) Berechnen Sie die Extrempunkte (mit Art) in Abhängigkeit von r und den Wendepunkt von $g_r(x)$.

e) Bestimmen Sie, für welches $r > 0$ der Hochpunkt die Koordinaten $H\left(-\frac{2}{15} \mid \frac{8}{45}\right)$ besitzt.

f) Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte für $r > 0$.

Aufgabe 3 (2 + 3 BE) – ohne CAS

Durch die Gleichung $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{ax}$ wird für jede positive Zahl a eine Funktion f_a definiert.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_a.

b) Zeigen Sie, dass die positive Nullstelle von f_a niemals eine Extremstelle dieser Funktion sein kann.

Aufgabe 4 (3 + 2 BE) – ohne CAS

Gegeben ist die Parameterfunktion f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{x+a}$. Dabei sei a eine positive Zahl.

a) Leiten Sie die Gleichung derjenigen Funktion f_a der Schar her, deren Graph durch den Punkt $(-2 | -2)$ verläuft.

b) Weisen Sie nach, dass jede Funktion der Schar einen Graphen mit einem Tiefpunkt besitzt.

Aufgabe 5 (3 + 2 BE) – ohne CAS

Für jede reelle Zahl t ist eine Funktion f_t durch $f_t(x) = x^3 - 2tx^2 + t^2x$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Wendestelle des Graphen von f_t.

b) Untersuchen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 6 (2 + 3 BE) – ohne CAS

Für jedes positive reelle a ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = e^{a \cdot x^2} - e^a; \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $P_a\,(1 \mid f_a(1))$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt P_a.

Aufgabe 7 (2 + 3 BE) – ohne CAS

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4; \quad x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat.

b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
Bestimmen Sie diesen Wert von a.

Aufgabe 8 (4 + 2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen f_k auf Extrem- und Wendepunkte. Skizzieren Sie den Graphen für $k = -2$ und $k = 2$.

b) Bestimmen Sie für $k > 0$ die Ortskurve der Tiefpunkte aller Funktionsgraphen.

c) Es sind $x_e \neq 0$ eine Extremstelle und $x_w \neq 0$ eine Wendestelle von f_k für $k > 0$.
Zeigen Sie: Das Verhältnis $\frac{x_e}{x_w}$ häng nicht von k ab. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Aussage.

Aufgabe 9 (6 BE)

Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = (e^x - t)^2$ und $t > 0$. Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurven der Extrempunkte und der Wendepunkte. Zeichnen Sie die Ortskurven zusammen mit einigen Graphen der Funktionsschar in ein gemeinsames Koordinatensystem.