Wiederholungsaufgaben (20.10.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE) – hilfsmittelfrei

In den nachfolgenden Aufgaben ist lediglich eine der fünf Auswahlmöglichkeiten richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

a) Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion $f : x \mapsto x \cdot (x - 7) \cdot (x^2 + 4) \quad (x \in \mathbb{R})$?

☐	☐	×	☐	☐
0	1	2	3	4

b) Welche Funktion h besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Extremstelle?

☐	☐	☐	×	☐
$h(x) = e^x$	$h(x) = \sin(x)$	$h(x) = \ln(x)$	$h(x) = \frac{1}{x} + x$	$h(x) = \sqrt{x}$
$(x \in \mathbb{R})$	$(x \in \mathbb{R})$	$(x \in \mathbb{R}, x > 0)$	$(x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$	$(x \in \mathbb{R}, x \geqq 0)$

c) Der größtmögliche Definitionsbereich D_f der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4 \cdot x - 4}$ ist

☐	☐	☐
$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 1\}$	$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leqq 1\}$	$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$
×	☐	
$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geqq 1\}$	$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 1\}$	

d) Die Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f : x \mapsto \ln(x)$ $(x \in D_f)$ hat an der Stelle $x = 1$ den Anstieg

☐	☐	☐	×	☐
-1	0	$\frac{1}{e}$	1	e

e) Die erste Ableitungsfunktion g' der Funktion g mit $g(x) = -\dfrac{6}{x^3}$ $(x \in D_g)$ kann beschrieben werden durch:

☐	☐	☐	☐	×
$g'(x) = -\frac{2}{x^2}$	$g'(x) = \frac{3}{x^2}$	$g'(x) = \frac{18}{x^2}$	$g'(x) = -\frac{2}{x^4}$	$g'(x) = \frac{18}{x^4}$

f) Gegeben ist die Funktion k mit $k(x) = 2 \cdot x \cdot (x + 4)^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Welche Nullstellen besitzt k?

☐	☐	☐	×	☐
$x_1 = -4$	$x_1 = -2$	$x_1 = -4$	$x_1 = -4$	$x_1 = 0$
$x_2 = -2$	$x_2 = 0$	$x_2 = 4$	$x_2 = 0$	$x_2 = 4$
$x_3 = 4$	$x_3 = 2$			

Aufgabe 2 (4 BE) – hilfsmittelfrei

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + x - 2$ ($x \in \mathbb{R}$)

Es werden die Tangenten in den beiden Schnittpunkten des Graphen der Funktion f mit der x-Achse betrachtet.
Untersuchen Sie, ob sich die Tangenten orthogonal schneiden.

Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Nullstellen, also $0 = x^2 + x - 2$ lösen und man erhält: $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$.

Für die Anstiege wird die erste Ableitung benötigt: $f'(x) = 2x + 1$.

Der Anstieg der Tangente an der Stelle $x = -2$ ist: $f'(-2) = -3$.
Dazu ist der senkrechte Anstieg: $\frac{1}{3}$.

Der Anstieg der Tangente an der Stelle $x = 1$ ist: $f'(1) = 3 \neq \frac{1}{3}$.

Daher schneiden sich die beiden Tangenten nicht orthogonal.

Aufgabe 3 (3 BE) – hilfsmittelfrei

Gegeben ist die Funktion h mit $y = h(x) = x^2 + 2 \cdot x - 3$ ($x \in \mathbb{R}$)

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P\,(0|h(0))$ und $Q\,(2|h(2))$.
Ermitteln Sie die Stelle x, an der die Tangente an den Graphen von h parallel zur Geraden g verläuft.

$h(0) = -3$ und $h(2) = 5$, also ist $P(0|-3)$ und $Q(2|5)$.

Der Anstieg zwischen P und Q ist: $m = \dfrac{5-(-3)}{2-0} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Gesucht ist nun die Stelle, an welcher die Tangente an $h(x)$ den Anstieg $m = 4$ besitzt. Dazu wird die erste Ableitung gebildet: $h'(x) = 2x + 2$

$4 = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$. Damit ist die Stelle ermittelt.

Aufgabe 4 (5 BE) – hilfsmittelfrei

Der Graph der Funktion s mit $s(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) besitzt genau einen Wendepunkt W.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion s in diesem Wendepunkt W.

Wendepunkt ermitteln: $s'(x) = 6x^2 - 12x$, $s''(x) = 12x - 12$ und $s'''(x) = 12 \neq 0$

$0 = s''(x)$ bzw. $0 = 12x - 12 \Rightarrow x = 1$. Da $s'''(1) \neq 0$ ist, befindet sich bei $x = 1$ eine Wendestelle.

$s(1) = -4$ somit hat der Wendepunkt die Koordinaten $W(1|-4)$.

Anstieg der Wendetangente: $s'(1) = -6$

Aufstellen der Tangentengleichung: $y = m \cdot x + n \Rightarrow -4 = -6 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 2$.

Daher hat die Wendetangente die Gleichung: $y = -6x + 2$.

Aufgabe 5 (4 BE) – hilfsmittelfrei

Der Graph der Funktion r mit $r(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$ $(x \in \mathbb{R})$ besitzt genau einen Wendepunkt W.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion r in diesem Wendepunkt W.

Wendepunkt ermitteln: $r'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, $r''(x) = 6x - 12$ und $r'''(x) = 6 \neq 0$

$0 = r''(x)$ bzw. $0 = 6x - 12 \Rightarrow x = 2$. Da $r'''(2) \neq 0$ ist, befindet sich bei $x = 2$ eine Wendestelle.

$r(2) = 0$ somit hat der Wendepunkt die Koordinaten $W(2|0)$.

Anstieg der Wendetangente: $r'(2) = -1$

Aufstellen der Tangentengleichung: $y = m \cdot x + n \Rightarrow 0 = -1 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 2$.

Daher hat die Wendetangente die Gleichung: $y = -x + 2$.