Aufgaben zu Funktionsuntersuchung (21.10.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (je 8 BE)

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f.

a) $f: x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_{x_1}(-4,85|0)$; $\quad S_{x_2}(0|0)$; $\quad S_{x_3}(1,85|0)$

Extrempunkte: $H(-3|27)$ und $T(1|-5)$

Wendepunkt: $W(-1|11)$

b) $f: x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2(x+3)$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y\left(0|\frac{3}{2}\right)$; $\quad S_{x_1}(-3|0)$; $\quad S_{x_2}(1|0)$

Extrempunkte: $H\left(-\frac{5}{3}|\frac{128}{27}\right)$ und $T(1|0)$

Wendepunkt: $W\left(-\frac{1}{3}|\frac{64}{27}\right)$

c) $f: x \mapsto x^4 - 2x^2$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}; y \geqq -1$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: achsensymmetrisch $(f(x) = f(-x))$

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_{x_1}(-\sqrt{2}|0)$; $\quad S_{x_2}(0|0)$; $\quad S_{x_3}(\sqrt{2}|0)$

Extrempunkte: $T_1(-1|-1)$ und $H(0|0)$ und $T_2(1|-1)$

Wendepunkt: $W_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}|-\frac{5}{9}\right)$ und $W_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}|-\frac{5}{9}\right)$

d) $f: x \mapsto 2x^3 - 6x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: punktsymmetrisch $(f(-x) = -f(x))$

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_{x_1}(-\sqrt{3}|0)$; $\quad S_{x_2}(0|0)$; $\quad S_{x_3}(\sqrt{3}|0)$

Extrempunkte: $H(-1|4)$ und $T(1|-4)$

Wendepunkt: $W(0|0)$

e) $f: x \mapsto (x-1) \cdot (x+2)^2$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-4); \qquad S_{x_1}(-2|0); \quad S_{x_2}(1|0)$

Extrempunkte: $H(-2|0)$ und $T(0|-4)$

Wendepunkt: $W(-1|-2)$

f) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: punktsymmetrisch

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0); \qquad S_{x_1}(-2|0); \quad S_{x_2}(0|0); \quad S_{x_3}(2|0)$

Extrempunkte: $H\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid \frac{16\cdot\sqrt{3}}{27}\right)$ und $T\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{16\cdot\sqrt{3}}{27}\right)$

Wendepunkt: $W(0|0)$

g) $f : x \mapsto (x+1)\cdot e^{-x}$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}; y \leqq 1$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|1); \qquad S_x(-1|0)$

Extrempunkte: $H(0|1)$

Wendepunkt: $W\left(1 \mid \frac{2}{e}\right)$

h) $f : x \mapsto 2x \cdot e^{1-x}$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}; y \leqq 2$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0); \qquad S_x(0|0)$

Extrempunkte: $H(1|2)$

Wendepunkt: $W\left(2 \mid \frac{4}{e}\right)$

i) $f : x \mapsto \frac{1}{4}e^{2x}\cdot(x^2-2)$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}; y \geqq -\frac{e^2}{4}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y\left(0 \mid -\frac{1}{2}\right); \qquad S_{x_1}(-\sqrt{2}|0); \quad S_{x_2}(\sqrt{2}|0)$

Extrempunkte: $T\left(1 \mid -\frac{e^2}{4}\right)$

Wendepunkt: $W_1(-2,58|0,007); \quad W_2(0,58|-1,33)$

Aufgabe 2 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x$.
Berechnen Sie den Abstand zwischen Hoch- und Tiefpunkt.

$f'(x) = -2x^2 - 2x + 4$ und $f''(x) = -4x - 2$

$0 = f'(x) \quad \rightarrow \quad x_1 = -2 \quad$ und $x_2 = 1$

$f''(-2) = 6 > 0 \rightarrow$ bei $x = -2$ ist ein lokales Minimum;
$f''(1) = -6 < 0 \rightarrow$ bei $x = 1$ ist ein lokales Maximum

$f(-2) = -\frac{20}{3} \quad \Rightarrow \quad T\left(-2 \middle| -\frac{20}{3}\right)$

$f(1) = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad H\left(1 \middle| \frac{7}{3}\right)$

Abstand d (*distance*) berechnen über die Formel $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(-2-1)^2 + (-\frac{20}{3} - \frac{7}{3})^2} = \sqrt{90} \approx 9,49$ LE