

## Übungsaufgabe (25.10.2021)

H. Wuschke

### Aufgabe 1 (3 + 3 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen einer in  $\mathbb{R}$  definierten ganzrationalen Funktion  $f$  vierten Grades. Die Tangente im Wendepunkt  $W(4|18)$  des Graphen hat die Steigung  $-4$ .

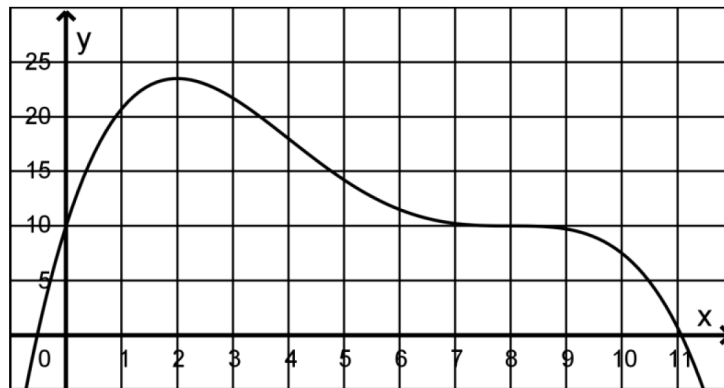


Abb. 1

- Zeichnen Sie die beschriebene Tangente in die Abbildung 1 ein und geben Sie die beiden Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion  $f'$  von  $f$  an.
- Der Graph von  $f'$  hat einen Tiefpunkt. Geben Sie die Koordinaten dieses Tiefpunktes an und begründen Sie Ihre Angabe.

### Aufgabe 2 (3 + 3 + 5 + 3 BE)

Für jeden Wert von  $k \in \mathbb{R}^+$  wird die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion

$$h_k : x \mapsto 10 \cdot (1 - e^{-k \cdot x}) \cdot e^{-x}$$

betrachtet. Der Graph von  $h_k$  wird mit  $G_k$  bezeichnet. Abbildung 2 zeigt  $G_1$ .

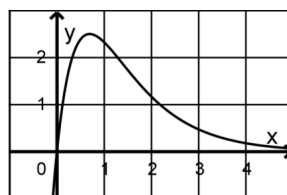


Abb. 2

Für die erste Ableitungsfunktion  $h'_k$  von  $h_k$  gilt:  $h'_k(x) = 10 \cdot ((k+1) \cdot e^{-k \cdot x} - 1) \cdot e^{-x}$ .

- Begründen Sie, dass  $h_k$  nur die Nullstelle  $x = 0$  hat. Geben Sie den Grenzwert von  $h_k$  für  $x \rightarrow +\infty$  an.
- Bestimmen Sie die  $x$ -Koordinate des Hochpunktes von  $G_k$ .
- Betrachtet werden die Tangente an  $G_k$  im Koordinatenursprung und die Gerade, die zu dieser Tangente im Koordinatenursprung senkrecht steht. Diese beiden Geraden schneiden die Gerade mit der Gleichung  $y = 1$ . Zeigen Sie rechnerisch, dass der Abstand der beiden Schnittpunkte  $10k + \frac{1}{10k}$  ist.

- d) Betrachtet man den Abstand aus Teilaufgabe c für alle Werte von  $k$ , so ist dieser für einen Wert von  $k$  am kleinsten. Bestimmen Sie diesen Wert und geben Sie den zugehörigen Abstand an.

### Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 + 3 + 4 BE)

Am 26. April 1986 ereignete sich in der Ukraine ein Reaktorunfall, bei dem radioaktives Plutonium-241 freigesetzt wurde. Plutonium-241 zerfällt exponentiell, d.h. in jedem Jahr nimmt die Masse des vorhandenen Plutonium-241 um einen konstanten prozentualen Anteil ab.

Im Folgenden wird der Zerfall einer bestimmten Menge Plutonium-241 betrachtet. Dieser Zerfall wird durch die Funktion  $p$  mit  $p(x) = 200 \cdot e^{-0,0480 \cdot x}$  und  $x \in \mathbb{R}_0^+$  beschrieben. Dabei ist  $x$  die Zeit in Jahren, die seit dem Reaktorunfall vergangen ist und  $p(x)$  die Masse des verbliebenen Plutonium-241 in Milligramm.

- Geben Sie die Bedeutung des Faktors 200 im Sachzusammenhang an und berechnen Sie den prozentualen Anteil, um den die Masse des Plutonium-241 in jedem Jahr abnimmt.
- Bestimmen Sie das Jahr, in dessen Verlauf erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein wird.

Bei dem Zerfall des Plutonium-241 entsteht radioaktives Americium-241, das ebenfalls exponentiell zerfällt. Im verwendeten Modell gibt die Funktion  $a$  mit  $a(x) = 207 \cdot (1 - e^{-0,0464 \cdot x}) \cdot e^{-0,0016 \cdot x}$  für jedes Jahr die Masse des vorhandenen Americium-241 in Milligramm an.

- Der Graph von  $a$  kann für einen Wert von  $k$  aus dem Graphen der Funktion  $h_k$  aus Aufgabe 2 erzeugt werden, indem man diesen in  $x$ -Richtung und in  $y$ -Richtung streckt. Geben Sie die beiden Streckungsfaktoren an und bestimmen Sie den passenden Wert von  $k$ .
- Im Funktionsterm von  $a$  erfasst der Faktor  $1 - e^{-0,0464 \cdot x}$  die Zunahme der Masse des vorhandenen Americium-241 und der Faktor  $e^{-0,0016 \cdot x}$  den Zerfall des vorhandenen Americium-241. Begründen Sie, dass es einen Zeitpunkt gibt, zu dem beide Faktoren den gleichen Wert annehmen.
- Geben Sie die Bedeutung der Aussage  $\frac{a(73)}{73} \approx 2,4$  im Sachzusammenhang an. Begründen Sie Ihre Angabe.