Aufgaben zu Krümmungsverhalten und Wendepunkte (26.09.2019)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (9 BE)

Bestimmen Sie die lokalen Hoch- bzw. Tiefpunkte und die Wendepunkte des Graphen der Funktion $f(x)$ mit $f(x) = (x-1)\cdot(x+2)^2$.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \qquad f'(x) = 3x^2 + 6x \qquad f''(x) = 6x + 6 \qquad f'''(x) = 6$

Extrempunkte:

$0 = 3x^2 + 6x = 3x \cdot (x+2) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -2$

Art des Extremums?

$f''(0) = 6 > 0 \qquad \rightarrow$ Bei $x_1 = 0$ ist ein lokales Minimum.

$f''(-2) = -6 < 0 \qquad \rightarrow$ Bei $x_2 = -2$ ist ein lokales Maximum.

Koordinaten bestimmen

$f(0) = -4 \quad \rightarrow \quad T(0|-4) \qquad f(-2) = -8 + 12 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad H(-2|0)$

Wendepunkt:

$0 = 6x + 6 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1$

Ist es ein Wendepunkt?

$f'''(-1) = 6 \neq 0 \quad \rightarrow$ Bei $x = -1$ liegt ein Wendpunkt vor.

Koordinaten bestimmen

$f(-1) = -1 + 3 - 4 = -2 \quad \rightarrow \quad W(-1|-2)$

Aufgabe 2 ohne CAS (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die gegebenen Funktionen $g(x)$ nur konvex oder nur konkav sind.

a) $g(x) = x^2 + 3x - 4$

$g'(x) = 2x + 3$ und $g''(x) = 2$

Also ist $g''(x) > 0$ (immer), deshalb ist die Funktion $g(x)$ nur konvex.

b) $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 38x + \pi$

$g'(x) = -\frac{1}{2}x - 38$ und $g''(x) = -\frac{1}{2}$

Also ist $g''(x) < 0$ (immer), deshalb ist die Funktion $g(x)$ nur konkav.

Aufgabe 3 ohne CAS (2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 1$ und $x \in \mathbb{R}$

1. Bestimmen Sie die x-Koordinate der Punkte, in denen der Graph von f die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schneidet.

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x + 1 \quad &&|\quad -1 \\ 0 &= \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x &&|\quad (\tfrac{1}{3}x \text{ ausklammern}) \\ 0 &= \tfrac{1}{3}x \cdot (x^2 - 4) \end{aligned}$$

Nun gilt der Satz: Ein Produkt ist dann Null, wenn ein Faktor Null ist. $\rightarrow$ $\underline{\underline{x_1 = 0}}$

$0 = x^2 - 4 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x_2 = -2}}$ und $\underline{\underline{x_3 = 2}}$

2. Unter den Tangenten an den Graphen von f hat eine die kleinste Steigung. Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

   Gesucht ist also der kleinste Anstieg, also das Minimum der ersten Ableitung.

   $f'(x) = x^2 - \frac{4}{3}$ und $f''(x) = 2x$ und $f'''(x) = 2$

   $0 = f''(x)$ bzw. $0 = 2x \quad \rightarrow \quad x = 0$

   Weil $f'''(0) = 2 > 0$ ist, ist dies ein lokales Minimum. Der kleinste Anstieg ist also an der Stelle $x = 0$. Nun muss das noch in die 1. Ableitung eingesetzt werden, um angeben zu können, wie groß der Anstieg der Tangente ist.

   $f'(0) = -\frac{4}{3}$ Also hat die Tangente eine Steigung von $-\frac{4}{3}$.

Aufgabe 4 ohne CAS (2 + 2 BE)

Gegeben ist eine Funktion f, die für jedes $x \in [a; b]$ eine Ableitung $f'(x)$ hat.
Es gilt $f(a) = f(b) = 0$ sowie $f(x) > 0$ für $x \in (a; b)$.

a) Entscheiden Sie für jede der beiden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

   - f besitzt mindestens ein Extremum in $(a; b)$.
     Das folgt aus dem Satz von Rolle und ist somit wahr.
   - f besitzt mindestens eine Nullstelle in $(a; b)$.
     Diese Aussage ist falsch, weil $f(x) > 0$ sein soll und somit keine Nullstelle mehr besitzen kann.

b) Begründen Sie, dass die Anzahl der Extrema von f für $x \in (a; b)$ ungerade sein muss.
   Maxima und Minima von f können in $(a; b)$ nur im Wechsel auftreten.
   Da $f(a) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x > a$ gilt, muss rechts von a zuerst ein Maximum kommen, dann (falls es eines gibt) ein Minimum, dann wieder ein Maximum etc.
   Da $f(x) > 0$ für $x < b$ und $f(b) = 0$ gilt, muss das letzte Extremum in $(a; b)$ links von b ebenfalls ein Maximum sein.
   Also ist die Anzahl der Extrema in $(a; b)$ gleich 1 oder 3 oder ..., jedenfalls ungerade.

Aufgabe 5 (2 + 2 BE)

Es wird die folgende Aussage betrachtet:
„Gilt $f'(a) = 0$, dann liegt der Punkt $P(a \mid f(a))$ des Graphen von f auf der x-Achse.“

a) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass diese Aussage falsch ist.
   Dies kann man mit sehr vielen Gegenbeispielen zeigen.
   Zum Beispiel: $f(x) = x^2 + 2$ dort ist $f'(x) = 2x$ und damit ist $f'(0) = 0$, aber $f(0) = 2$ bzw. der Punkt $P(0|2)$ (liegt nicht auf der x-Achse).

b) Formulieren Sie eine sinnvolle wahre Aussage, die in folgender Weise beginnt:
   „Wenn $f'(a) = 0$ ist, dann ...“
   „... besitzt der Graph im Punkt $P(a|f(a))$ eine waagerechte Tangente.“ oder
   „... ist der Punkt $P(a|f(a))$ ein Extrem- oder Sattelpunkt.“ oder
   „... liegt der Punkt $P(a|f'(a))$ des Graphen der Ableitung auf der x-Achse.“

Aufgabe 6 (3 + 3 + 4 + 2 BE)

Papierflieger verlassen die Hand eines Werfers in einer bestimmten Abwurfhöhe, unter einem bestimmten Abwurfwinkel und mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit. Die Flugkurven können abhängig von diesen drei Bedingungen sowie von der jeweiligen Bauweise des Papierfliegers unterschiedlich verlaufen. Im Folgenden sollen drei Typen von Flugkurven unterschieden werden, die in der Abbildung schematisch dargestellt sind.
Wird die Größe der betrachteten Papierflieger vernachlässigt, können die Flugkurven bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen x-Achse entlang des horizontalen Bodens und dessen y-Achse durch den Abwurfpunkt verläuft, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben werden. Im Folgenden soll der x-Wert der horizontalen Entfernung des Papierfliegers vom Abwurfpunkt entsprechen, der zugehörige Funktionswert der Flughöhe (jeweils in Metern).

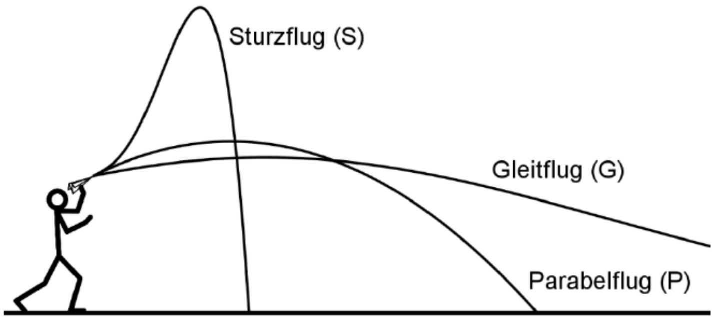


Abbildung 1: Flugkurven

Ein Papierflieger bewegt sich entlang einer Flugkurve vom Typ S. Diese kann mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s mit $s(x) = -x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$ beschrieben werden.

a) Geben Sie die Abwurfhöhe an und zeigen Sie, dass die Flugweite etwa 2,27 m beträgt.

$s(0) = 2 \quad \rightarrow \quad$ Abwurfhöhe: 2 m

$0 = s(x) \quad \rightarrow \quad x_1 \approx -0,83$ (entfällt, da kleiner 0) und $x_2 \approx 2,27$ (Flugweite)

b) Zeigen Sie, dass der Papierflieger seine maximale Flughöhe besitzt, wenn seine horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt etwa 1,5 m beträgt. Geben Sie diese Flughöhe an.

$s'(x) = -4x^3 + 6x^2 + \frac{1}{2}$ und $s''(x) = -12x^2 + 12x$

$0 = s'(x) \quad \rightarrow \quad x \approx 1,55$

$s''(1,55) = -10,23 < 0 \quad \rightarrow \quad$ an der Stelle $x = 1,55$ ist ein lokales Maximum. Schlecht gerundet könnte man sagen, dass es etwa 1,5 m vom Abwurfpunkt entfernt ist.

$s(1,55) \approx 4,45 \quad \rightarrow \quad$ Die maximale Flughöhe beträgt etwa 4,45 m.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte des Graphen von s und geben Sie die jeweilige Steigung des Graphen von s in den Wendepunkten an.

$s'''(x) = -24x + 12$

$0 = s''(x) \quad \rightarrow \quad x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

$s'''(0) = 12 \neq 0$ und $s'''(1) = -12 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ An beiden Stellen liegt ein Wendepunkt vor.

$s(0) = 2 \quad \rightarrow \quad W_1(0|2)$

$s'(0) = \frac{1}{2} \quad$ Also ist $\frac{1}{2}$ die Steigung im Wendepunkt W_1.

$s(1) = 3,5 \quad \rightarrow \quad W_2(1|3,5)$

$s'(1) = 2,5 \quad$ Also ist 2,5 die Steigung im Wendepunkt W_2.

d) Beschreiben Sie die Bedeutung des Wendepunkts mit der größeren x-Koordinate im Hinblick auf die Steigung der Flugkurve des Papierfliegers.

Im Wendepunkt W_2 (Wendepunkt mit der größeren x-Koordinate) ist die Steigung am größten. Das heißt, dass sie danach nur noch abnimmt.

Aufgabe 7 (3 + 2 + 3 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen v_t mit

$$v_t(x) = \left(\frac{x}{t}\right)^2 \cdot (x-t)^2 + 1 \text{ mit } t \in \mathbb{R}^+$$

a) Nennen Sie drei Eigenschaften, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.
Die Graphen bestehen aus Punkten mit positiven y-Koordinaten, haben genau drei Extrempunkte und sind symmetrisch bezüglich einer Parallele zur y-Achse. (weitere Eigenschaften möglich)

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen von v_8.
$v_8'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0; x_2 = 4$ und $x_3 = 8$
$v_8''(4) = -1 < 0$ und $v_8(4) = 5 \qquad \rightarrow \qquad H(4 \mid 5)$

c) Zeigen Sie, dass der Graph von v_t genau zwei Wendepunkte hat, deren y-Koordinaten den Wert $\frac{1}{36}t^2 + 1$ haben.
$v_t''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{(\sqrt{3}+3)\cdot t}{6}$ und $x_2 = \frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}$

$v_t'''\left(\frac{(\sqrt{3}+3)\cdot t}{6}\right) = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{t} \neq 0 \qquad v_t'''\left(\frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}\right) = -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{t} \neq 0$

$\rightarrow$ beide Wendepunkte existieren.

$v_t\left(\frac{(\sqrt{3}+3)\cdot t}{6}\right) = \frac{t^2}{36} + 1 = v_8\left(\frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}\right)$

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \sqrt[4]{v_8(x)}$.

d) Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

- Für keinen Wert von x ist der Funktionswert von f größer als der von v_8.

  $f(x) > v_8(x) \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow}$ falsche Aussage. Daher ist also der Funktionswert von f für keinen Wert von x größer als die Funktionswerte von v_8.

- Das Monotonieverhalten von f stimmt mit dem von v_8 überein.

  $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{t}{2}; x_2 = t; x_3 = 0$
  Das sind auch die Extremstellen von $v_t(x)$.
  Die Wurzelfunktion verändert die Monotonie einer Funktion nicht und da die Extremstellen an den gleichen Stellen sind, müssen auch die Monotoniebereiche gleich sein.

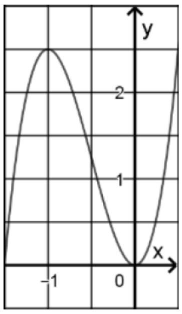
e) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x - \sqrt{2}\right) - f(x)\right) = 0$
Beschreiben Sie die grafische Bedeutung dieser Aussage.

Die Gerade $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \sqrt{2}$ ist eine Asymptote für die Funktion $f(x)$.

Aufgabe 8 (2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 BE)

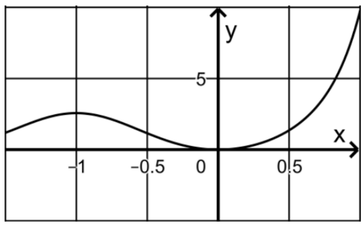
Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{5}{2}x^2 \cdot (2x+3)$

a) Zeichnen Sie den Graphen von g für $-1,5 \leqq x \leqq 0,5$ in ein Koordinatensystem ein.



b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.
Wendepunkt graphisch bestimmen: $W(-0,5|1,25)$
Es gilt $m = \tan(\alpha) = g'(x_0)$ also $g'(-0,5) = -3,75$ somit ist $\tan(\alpha) = -3,75$ bzw. $\alpha = \tan^{-1}(-3,75) \approx -75,1°$ (an Gradmaß im Rechner denken)

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$.



c) Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to \infty$ an und beschreiben Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$, also nähert sich der Funktionsgraph im negativen Bereich immer näher der x-Achse an.

d) Zeigen Sie: $h'(x) = 10x \cdot (1+x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ ist ein Term der ersten Ableitungsfunktion von h.

$h'(x) = 10x \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 5x^2 \cdot 2x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} = e^{\frac{2}{3}x^3} \cdot (10x + 10x^4) = e^{\frac{2}{3}x^3} \cdot 10x \cdot (1+x^3)$

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h.

$0 = h'(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$ und $x_2 = 0$
$h''(-1) = -30 \cdot e^{-\frac{2}{3}} < 0 \quad \to \quad x_{max} = -1 \quad \to \quad h(-1) = 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}} \quad \to \quad H\left(-1 \mid 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}}\right)$

$h''(0) = 10 > 0 \quad \to \quad x_{min} = 0 \quad \to \quad h(0) = 0 \quad \to \quad T(0|0)$

f) Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen von g von der mittleren Steigung des Graphen von h im Bereich $-1 \leqq x \leqq 0$.

Mittlere Änderungsrate von g: $\frac{g(0)-g(-1)}{0-(-1)} = -\frac{5}{2}$

Mittlere Änderungsrate von h: $\frac{h(0)-h(-1)}{0-(-1)} = -5 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$

$\frac{-\frac{5}{2}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}} \approx 0,9739 \quad \rightarrow$ also weicht die mittlere Änderungsrate von g ca. 2,61% von h im Bereich $-1 \leqq x \leqq 0$ ab.

g) Es gilt: $(h(1) - g(1)) \cdot (h(2) - g(2)) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1 < x < 2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Das Produkt ist negativ, also müssen beide Faktoren ein anderes Vorzeichen haben. Im ersten Funktion wird die Differenz von h bzgl. g an der Stelle $x = 1$ berechnet und beim zweiten Faktor an der Stelle $x = 2$. Also müssen beide Funktionen im Intervall $(1; 2)$ mindestens einmal schneiden.