Aufgaben zu Krümmungsverhalten und Wendepunkte (29.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (9 BE)

Bestimmen Sie die lokalen Hoch- bzw. Tiefpunkte und die Wendepunkte des Graphen der Funktion $f(x)$ mit $f(x) = (x-1) \cdot (x+2)^2$.

Aufgabe 2 ohne CAS (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die gegebenen Funktionen $g(x)$ nur konvex oder nur konkav sind.

a) $g(x) = x^2 + 3x - 4$ b) $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 38x + \pi$

Aufgabe 3 ohne CAS (2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 1$ und $x \in \mathbb{R}$

1. Bestimmen Sie die x-Koordinate der Punkte, in denen der Graph von f die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schneidet.
2. Unter den Tangenten an den Graphen von f hat eine die kleinste Steigung. Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

Aufgabe 4 ohne CAS (2 + 2 BE)

Gegeben ist eine Funktion f, die für jedes $x \in [a; b]$ eine Ableitung $f'(x)$ hat.
Es gilt $f(a) = f(b) = 0$ sowie $f(x) > 0$ für $x \in (a; b)$.

a) Entscheiden Sie für jede der beiden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

- f besitzt mindestens ein Extremum in $(a; b)$.
- f besitzt mindestens eine Nullstelle in $(a; b)$.

b) Begründen Sie, dass die Anzahl der Extrema von f für $x \in (a; b)$ ungerade sein muss.

Aufgabe 5 (2 + 2 BE)

Es wird die folgende Aussage betrachtet:
„Gilt $f'(a) = 0$, dann liegt der Punkt $P(a \mid f(a))$ des Graphen von f auf der x-Achse.“

a) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass diese Aussage falsch ist.

b) Formulieren Sie eine sinnvolle wahre Aussage, die in folgender Weise beginnt:
„Wenn $f'(a) = 0$ ist, dann ...“

Aufgabe 6 (3 + 3 + 4 + 2 BE)

Papierflieger verlassen die Hand eines Werfers in einer bestimmten Abwurfhöhe, unter einem bestimmten Abwurfwinkel und mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit. Die Flugkurven können abhängig von diesen drei Bedingungen sowie von der jeweiligen Bauweise des Papierfliegers unterschiedlich verlaufen. Im Folgenden sollen drei Typen von Flugkurven unterschieden werden, die in der Abbildung schematisch dargestellt sind.
Wird die Größe der betrachteten Papierflieger vernachlässigt, können die Flugkurven bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen x-Achse entlang des horizontalen Bodens und dessen y-Achse durch den Abwurfpunkt verläuft, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben werden. Im Folgenden soll der x-Wert der horizontalen Entfernung des Papierfliegers vom Abwurfpunkt entsprechen, der zugehörige Funktionswert der Flughöhe (jeweils in Metern).

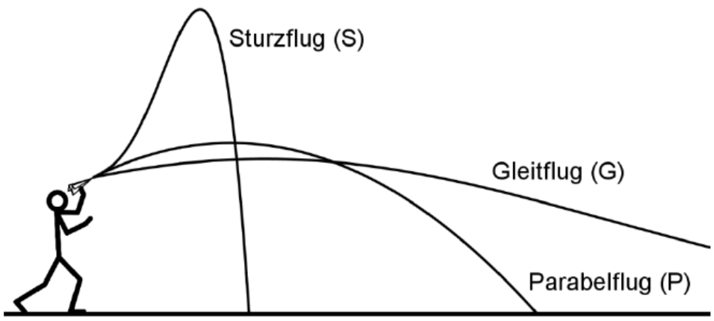


Abbildung 1: Flugkurven

Ein Papierflieger bewegt sich entlang einer Flugkurve vom Typ S. Diese kann mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s mit $s(x) = -x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$ beschrieben werden.

a) Geben Sie die Abwurfhöhe an und zeigen Sie, dass die Flugweite etwa 2,27 m beträgt.

b) Zeigen Sie, dass der Papierflieger seine maximale Flughöhe besitzt, wenn seine horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt etwa 1,5 m beträgt. Geben Sie diese Flughöhe an.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte des Graphen von s und geben Sie die jeweilige Steigung des Graphen von s in den Wendepunkten an.

d) Beschreiben Sie die Bedeutung des Wendepunkts mit der größeren x-Koordinate im Hinblick auf die Steigung der Flugkurve des Papierfliegers.

Aufgabe 7 (3 + 2 + 3 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen v_t mit

$$v_t(x) = \left(\frac{x}{t}\right)^2 \cdot (x-t)^2 + 1 \text{ mit } t \in \mathbb{R}^+$$

a) Nennen Sie drei Eigenschaften, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen von v_8.

c) Zeigen Sie, dass der Graph von v_t genau zwei Wendepunkte hat, deren y-Koordinaten den Wert $\frac{1}{36}t^2 + 1$ haben.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \sqrt[4]{v_8(x)}$.

d) Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

- Für keinen Wert von x ist der Funktionswert von f größer als der von v_8.
- Das Monotonieverhalten von f stimmt mit dem von v_8 überein.

e) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x - \sqrt{2}\right) - f(x)\right) = 0$

Beschreiben Sie die grafische Bedeutung dieser Aussage.

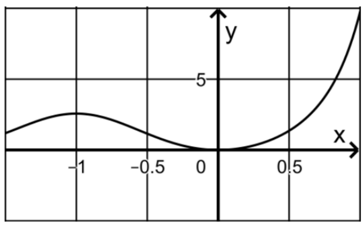
Aufgabe 8 (2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{5}{2}x^2 \cdot (2x+3)$

a) Zeichnen Sie den Graphen von g für $-1,5 \leqq x \leqq 0,5$ in ein Koordinatensystem ein.

b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$.



c) Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to \infty$ an und beschreiben Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt.

d) Zeigen Sie: $h'(x) = 10x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ ist ein Term der ersten Ableitungsfunktion von h.

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h.

f) Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen von g von der mittleren Steigung des Graphen von h im Bereich $-1 \leqq x \leqq 0$.

g) Es gilt: $(h(1) - g(1)) \cdot (h(2) - g(2)) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1 < x < 2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.